Transformações Geométricas em Imagens

Adair Santa Catarina
Curso de Ciência da Computação
Unioeste – Campus de Cascavel – PR

Agosto/2023

Materiais de referência:
Gonzalez, R. C.; Woods, R. E. **Processamento digital de imagens**. 3. ed. São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2010.
Pedrini, H. Schwartz, W. R. **Análise de imagens digitais**: princípios, algoritmos e aplicações. São Paulo : Thomson Learning, 2008.

Transformações Geométricas em Imagens

Imagens digitais podem sofrer as transformações geométricas de translação, rotação, escala, cisalhamento, entre outras.

A transformação geométrica de imagens consiste em duas operações básicas:

1) A transformação espacial das coordenadas;
2) A interpolação de intensidade que atribui níveis de intensidade aos pixels transformados espacialmente.

Transformações Geométricas em Imagens

A transformação espacial segue a estrutura:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(x, y) são coordenadas de um pixel na imagem original; (x', y') são coordenadas do pixel equivalente na imagem transformada;

M é uma matriz de transformação.

Por exemplo:

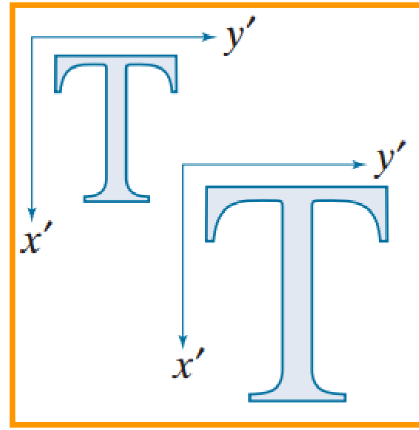
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta transformação reduz a dimensão da imagem original à metade em ambas as direções.

As Matrizes de Transformação Geométrica

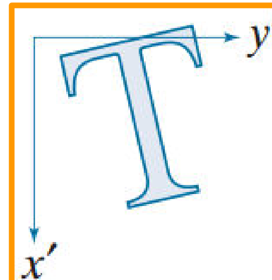
Escala: $\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = S_x \cdot x \\ y' = S_y \cdot y \end{matrix}$

Se $Sx = -1$ e $S_y = 1$ ou $S_x = 1$ e $Sy = -1$, o comportamento é de reflexão.

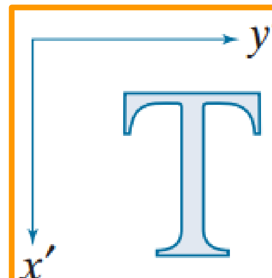


Rotação:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = x \cdot cos\theta - y \cdot sen\theta \\ y' = x \cdot sen\theta + y \cdot cos\theta \end{matrix}$$

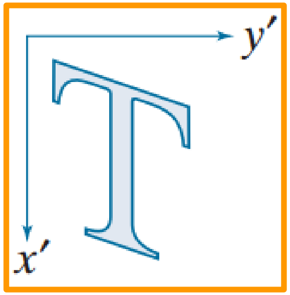


Translação: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{matrix}$

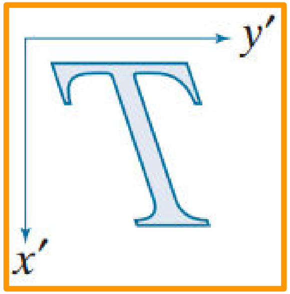


As Matrizes de Transformação Geométrica

$$\text{Cisalhamento Vertical}: \begin{bmatrix} 1 & SH_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = x + SH_y \cdot y \\ y' = y \end{matrix}$$



$$\text{Cisalhamento Horizontal}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ SH_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = x \\ y' = SH_x \cdot x + y \end{matrix}$$



$$\text{Transformação Afim}: \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação afim concatena as transformações de escala, translação, rotação e cisalhamento em uma matriz, dependendo dos valores escolhidos para t_{ij}.

A Interpolação de Intensidades

Para concluir uma transformação geométrica precisamos interpolar uma intensidade/cor para os pixels da imagem destino.

Este processo pode ser feito por **mapeamento direto** ou por **mapeamento inverso**.

O mapeamento direto consiste em varrer a imagem original e, para cada pixel (x, y), calcular a nova posição (x', y') utilizando as transformações vistas anteriormente.

O mapeamento direto pode causar problemas, pois mais de um pixel (x, y) pode ser mapeado para a mesma posição (x', y'); ou (x', y') pode ter nenhum (x, y) mapeado em sua posição, ficando sem cor/intensidade.

A Interpolação de Intensidades

O mapeamento inverso resolve estes problemas. Percorremos todos os pixels (x', y') da imagem final para calcular qual sua posição na imagem original. Para isso usamos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

O resultado (x, y), na maioria das vezes, não é inteiro. Portanto, devemos realizar uma interpolação de valores de cor/intensidade para atribuí-la ao pixel (x', y').

Os modelos de interpolação mais utilizados são: Vizinho mais próximo, bilinear e bicúbica.

A Interpolação de Intensidades

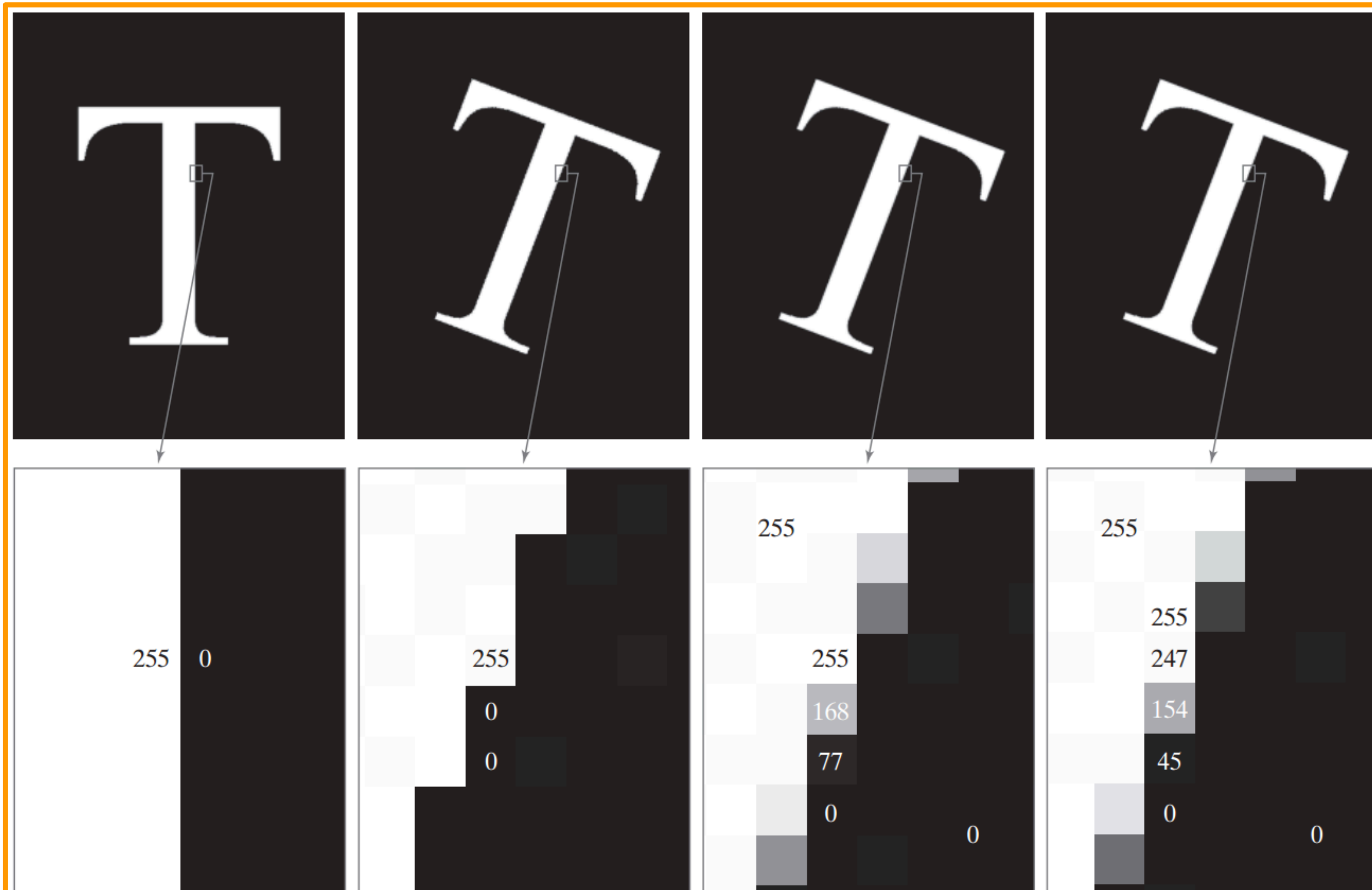
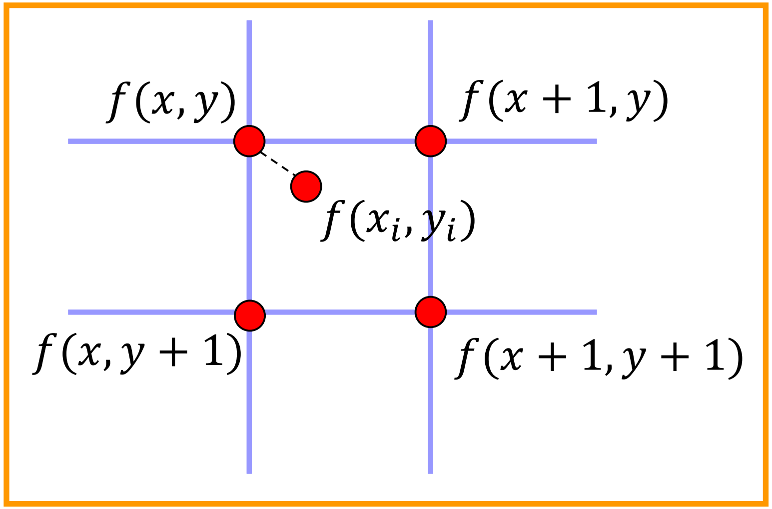


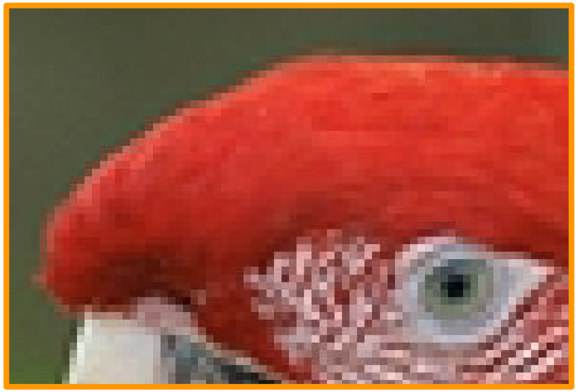
Imagem original. →Rotação de 21º | Vizinho mais próximo | Interpolação bilinear | Interpolação bicúbica

Interpolação pelo Vizinho mais Próximo

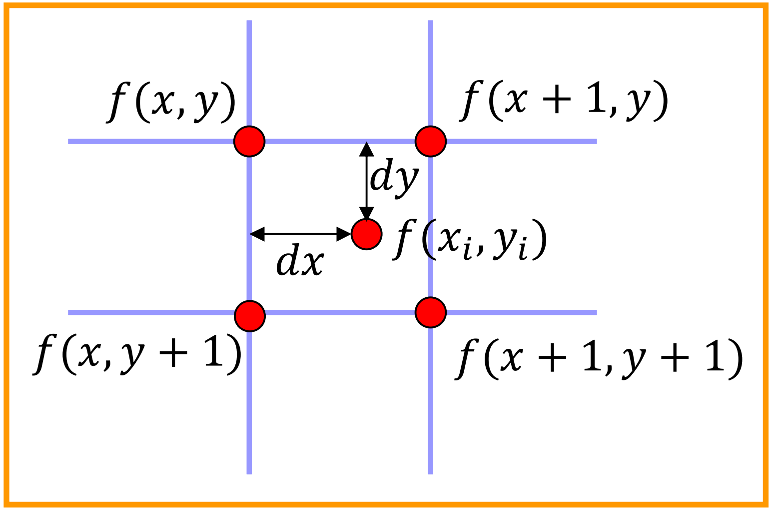


$$f(x_i,y_i) = f\big(int(x_i + 0{,}5), int(y_i + 0{,}5)\big)$$

Este método de interpolação pode gerar problemas de *aliasing* e blocagem de pixels na ampliação de imagens.



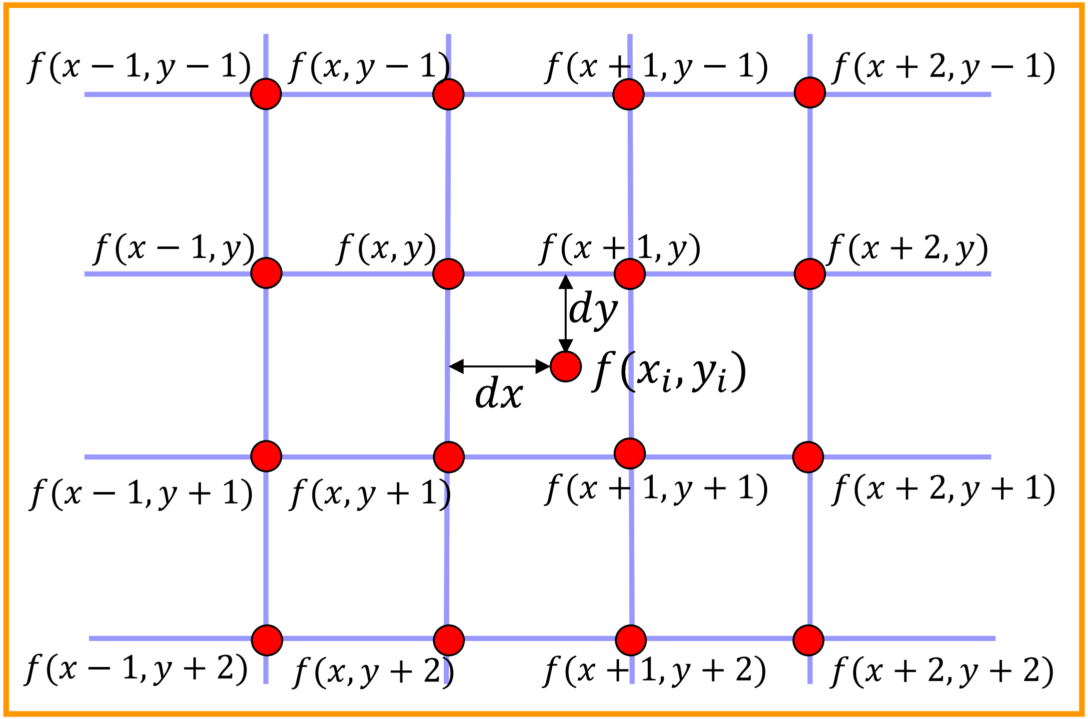
Interpolação Bilinear



$$\boxed{\begin{aligned} dx &= xi - \lfloor x_i \rfloor \\ dy &= yi - \lfloor y_i \rfloor \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_i,y_i) = {} & (1-dx)(1-dy)\cdot f(x,y) + dx(1-dy)\cdot f(x+1,y) + \\ & (1-dx)dy\cdot f(x,y+1) + dxdy\cdot f(x+1,y+1) \end{aligned}}$$

Interpolação Bicúbica

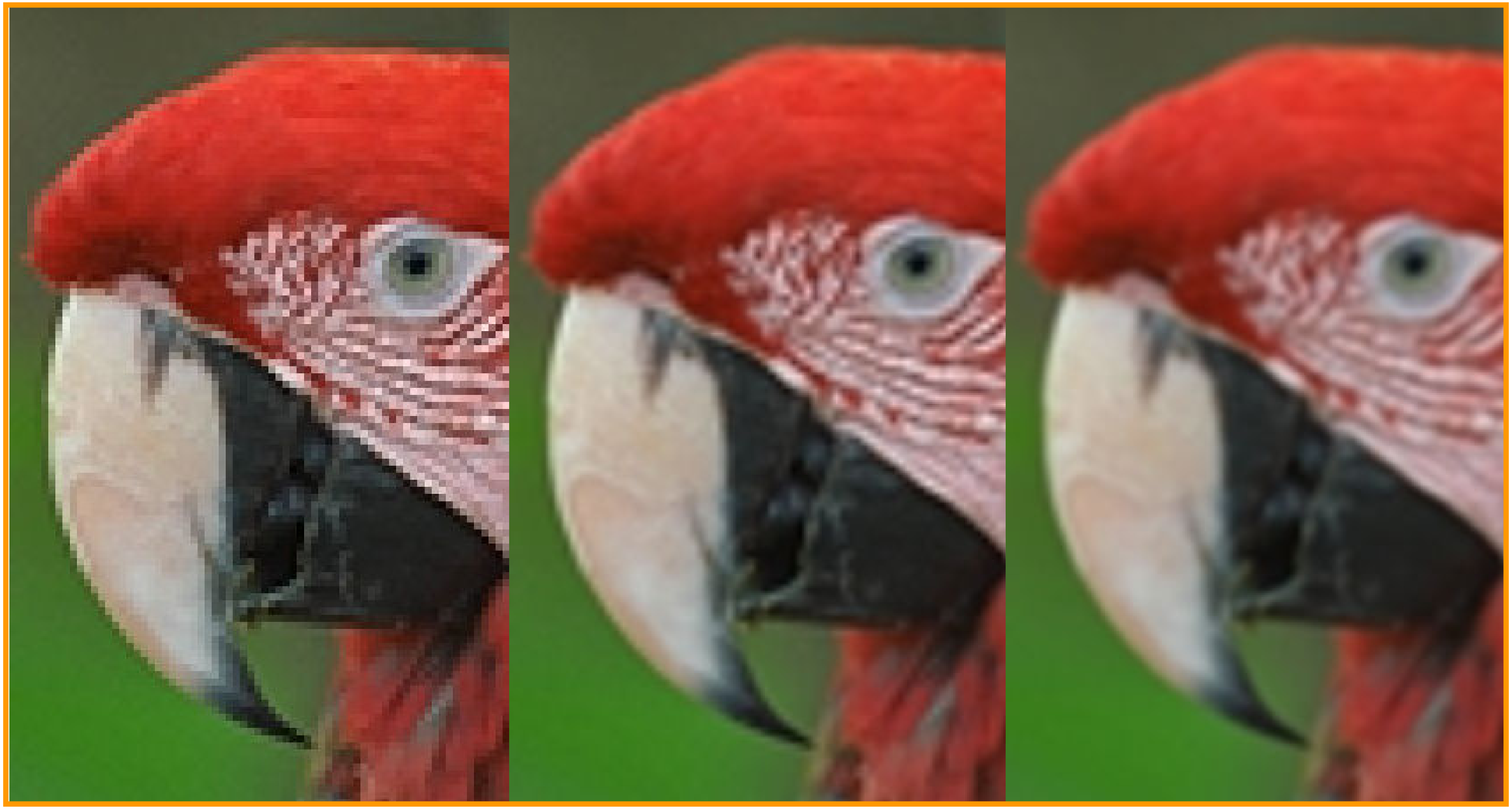


$$dx = xi - \lfloor x_i \rfloor$$
$$dy = yi - \lfloor y_i \rfloor$$

$$f(x_i,y_i) = \sum_{m=-1}^{2}\sum_{n=-1}^{2} f(x+m,y+n)\cdot R(m-dx)\cdot R(dy-n)$$

$$R(s) = \frac{1}{6}\left[P(s+2)^3 - 4P(s+1)^3 + 6P(S)^3 - 4P(s-1)^3\right]$$
$$P(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Comparação Visual das Interpolações



Vizinho mais próximo | Interpolação Bilinear | Interpolação Bicúbica

Transformação Projetiva

A transformação projetiva corresponde à transformação perspectiva que converte um ponto no espaço 3D para um espaço 2D, cuja formulação algébrica é:

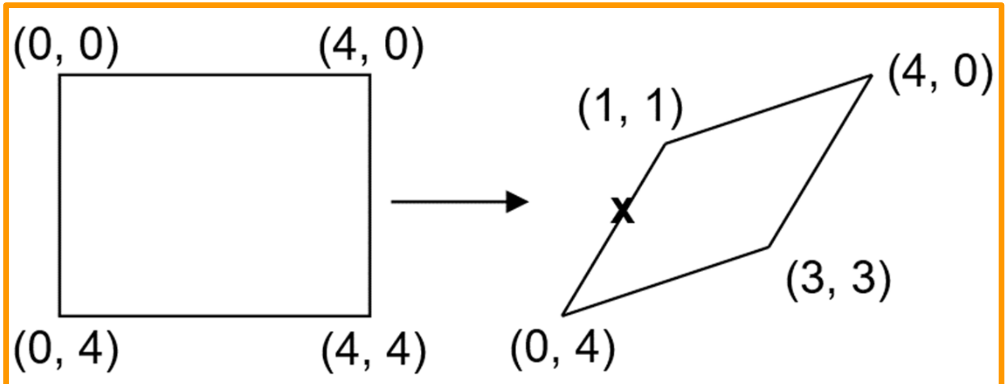
$$x' = \frac{ax + by + c}{ix + jy + 1}$$

$$y' = \frac{dx + ey + f}{ix + jy + 1}$$

A transformação projetiva, além de realizar as transformações de translação, rotação, escala e cisalhamento, também possibilita criar a ilusão da projeção perspectiva em imagens.

Transformação Projetiva

Para aplicarmos a transformação projetiva temos de definir 4 pontos não colineares em duas imagens correspondentes.



Ponto de Controle	Originais (x, y)	Projetadas (x', y')
1	(0, 0)	(1, 1)
2	(4, 4)	(3, 3)
3	(4, 0)	(4, 0)
4	(0, 4)	(0, 4)

Transformação Projetiva

Ponto de Controle	Originais (*x*, *y*)	Projetadas (*x'*, *y'*)
1	(0, 0)	(1, 1)
2	(4, 4)	(3, 3)
3	(4, 0)	(4, 0)
4	(0, 4)	(0, 4)

Com os 4 pontos de controle podemos escrever as equações para determinar os coeficientes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *i*, *j*, da transformação projetiva.

1

$$x' = \frac{ax+by+c}{ix+jy+1} \Rightarrow 1 = \frac{a.0+b.0+c}{i.0+j.0+1} \Rightarrow c = 1$$

$$y' = \frac{dx+ey+f}{ix+jy+1} \Rightarrow 1 = \frac{d.0+e.0+f}{i.0+j.0+1} \Rightarrow \mathrm{f} = 1$$

2

$$x' = \frac{ax+by+c}{ix+jy+1} \Rightarrow 3 = \frac{a.4+b.4+c}{i.4+j.4+1} \Rightarrow$$

$$4\mathrm{a} + 4\mathrm{b} - 12\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 2 = 0$$

$$y' = \frac{dx+ey+f}{ix+jy+1} \Rightarrow 3 = \frac{d.4+e.4+f}{i.4+j.4+1} \Rightarrow$$

$$4\mathrm{d} + 4\mathrm{e} - 12\mathrm{i} - 12\mathrm{j} - 2 = 0$$

3

$$x' = \frac{ax+by+c}{ix+jy+1} \Rightarrow 4 = \frac{a.4+b.0+c}{i.4+j.0+1} \Rightarrow$$

$$4\mathrm{a} - 16\mathrm{i} - 3 = 0$$

$$y' = \frac{dx+ey+f}{ix+jy+1} \Rightarrow 0 = \frac{d.4+e.0+f}{i.4+j.0+1} \Rightarrow$$

$$4\mathrm{d} + 1 = 0 \Rightarrow d = -0{,}25$$

4

$$x' = \frac{ax+by+c}{ix+jy+1} \Rightarrow 0 = \frac{a.0+b.4+c}{i.0+j.4+1} \Rightarrow$$

$$4\mathrm{b} + 1 = 0 \Rightarrow b = -0{,}25$$

$$y' = \frac{dx+ey+f}{ix+jy+1} \Rightarrow 4 = \frac{d.0+e.4+f}{i.0+j.4+1} \Rightarrow$$

$$4\mathrm{e} - 16\mathrm{j} - 3 = 0$$

Transformação Projetiva

A solução final do sistema de equações obtidos a partir dos 4 pontos de controle é:
a = 0,75; b = -0,25; c = 1; d = -0,25;
e = 0,75; f = 1; i = 0; j = 0

O que nos dá as expressões de mapeamento direto da transformação projetiva.

$$x' = 0{,}75x - 0{,}25y + 1$$
$$y' = -0{,}25x + 0{,}75y + 1$$

Já se sabe que o mapeamento direto apresenta problemas, então procede-se com o mapeamento inverso. Para cada coordenada (x', y') da imagem final resolve-se um sistema a duas equações para encontrar o equivalente (x, y) na imagem original e fazer a interpolação de cor/intensidade.

Transformação Projetiva – um tipo de *Warping*