MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Adair Santa Catarina
Curso de Ciência da Computação
Unioeste – Campus de Cascavel – PR

Agosto/2023

Morfologia Matemática

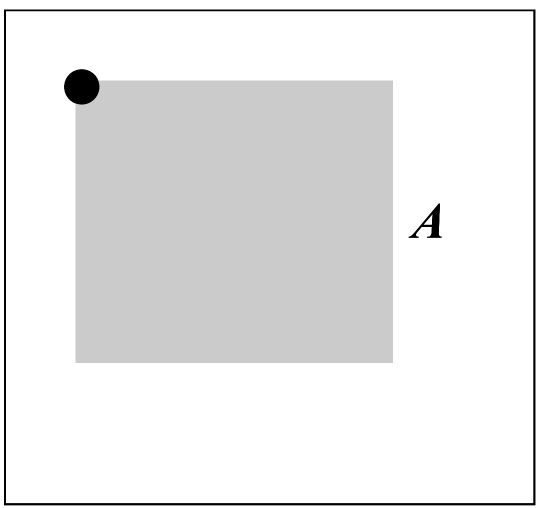
- Morfologia na Biologia → Estudo da estrutura dos animais e plantas;
- Morfologia Matemática:
  - Elaborada por Georges Matheron e Jean Serra;
  - Estudo da estrutura geométrica das entidades presentes em uma imagem;
  - Diversas aplicações no processamento e análise de imagens: realce, filtragem, segmentação, detecção de bordas, esqueletização, afinamento, etc;
  - Base matemática → Teoria de conjuntos.

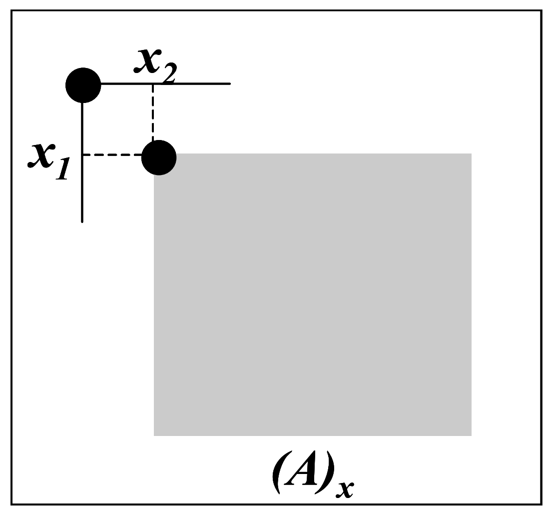
Morfologia Matemática

- Princípio básico:
  - extrair informações relativas à geometria e à topologia de um conjunto desconhecido (uma imagem), pela transformação através de outro conjunto completamente definido, chamado **elemento estruturante**.
- Representação:
  - Imagens binárias → Z^2:
    - Pixels pretos → (x, y).
  - Imagens monocromáticas → Z^3:
    - Pixels → (x, y, cor).

Definições Básicas

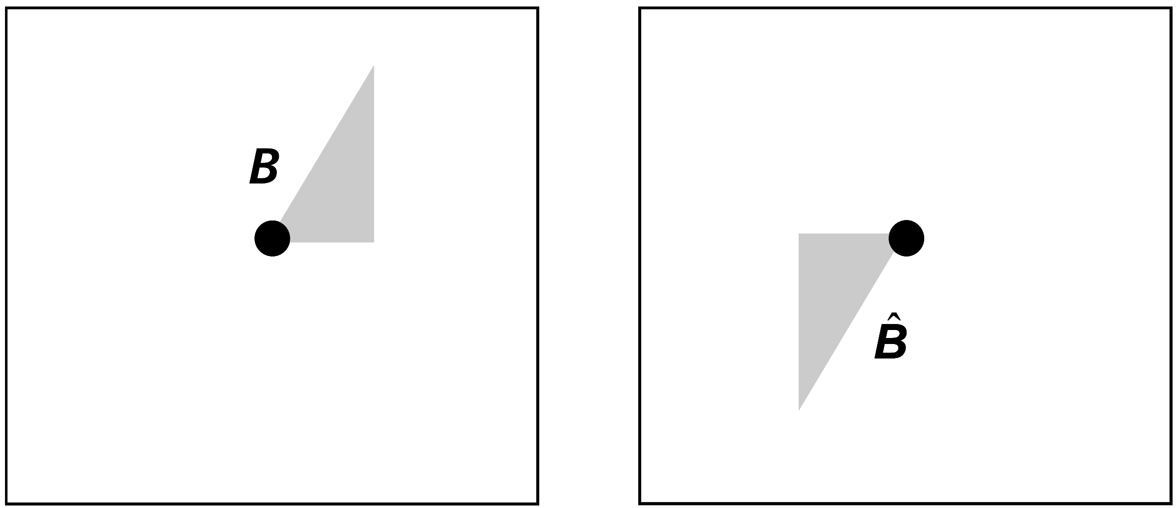
- Sejam A e B conjuntos em Z^2:
  - Componentes são $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$.
- Translação → $(A)_x$
  - $x = (x_1, x_2)$;
  - $(A)_x = \{c \mid c = a + x, \text{ para } a \in A\}$





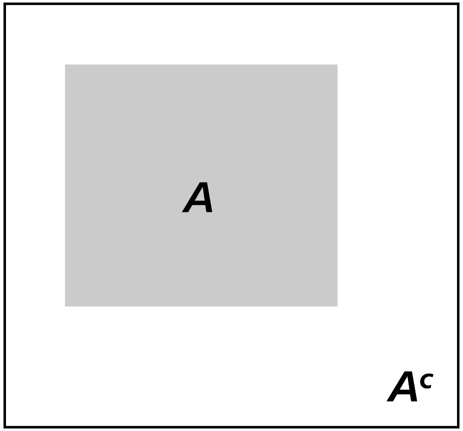
Definições Básicas

- Reflexão de B → $\hat{B}$
  - $\hat{B} = \{x \mid x = -b, \text{ para } b \in B\}$

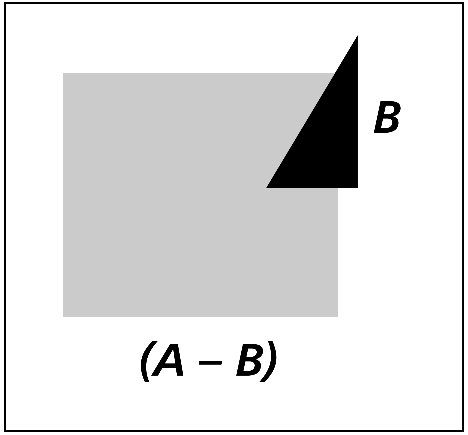


Definições Básicas

- Complemento de A → A^c
  - $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

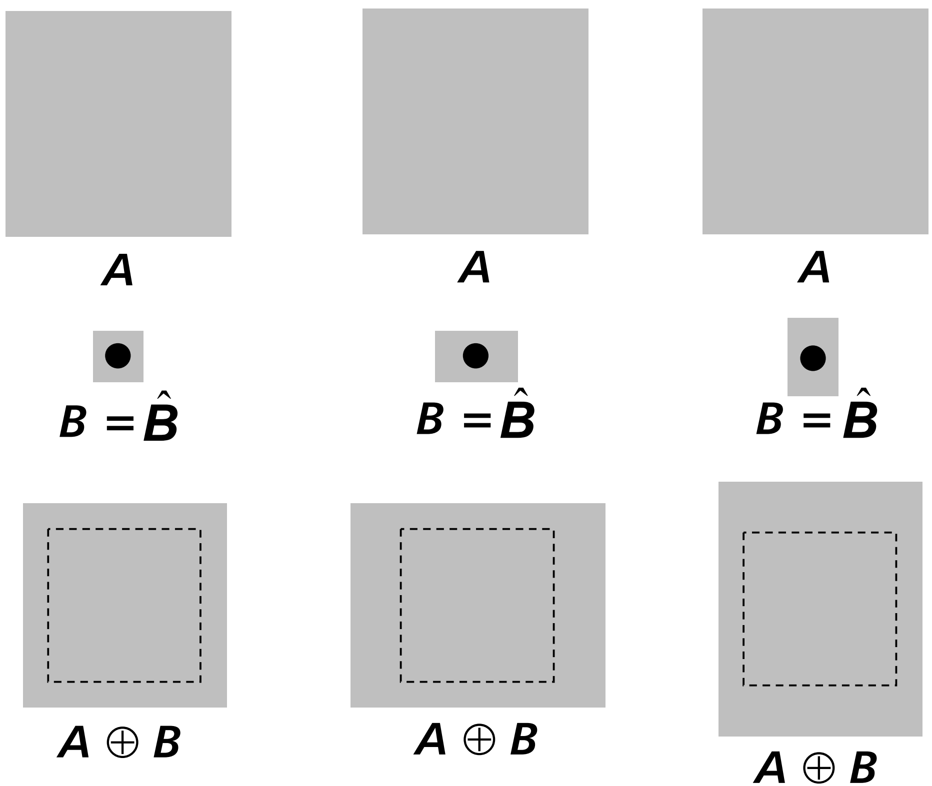


- Diferença entre A e B → A – B
  - $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$



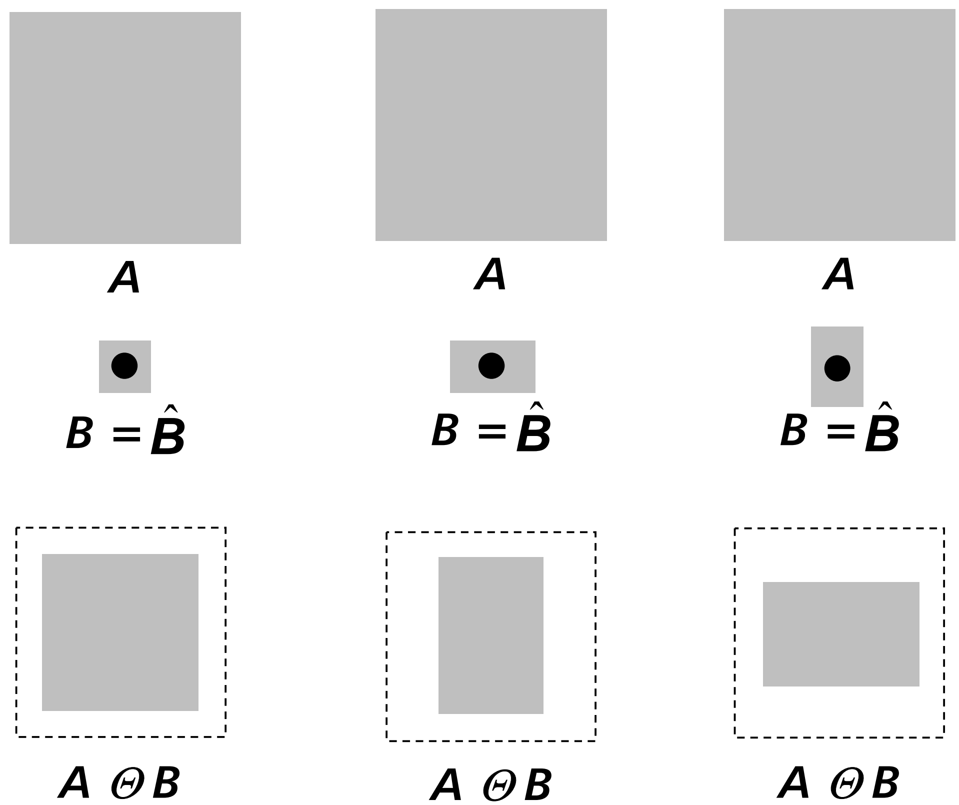
Dilatação

- $A \oplus B = \{x \mid (\hat{B})_x \cap A \neq \phi\}$
- $A \oplus B = \{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \subseteq A\}$



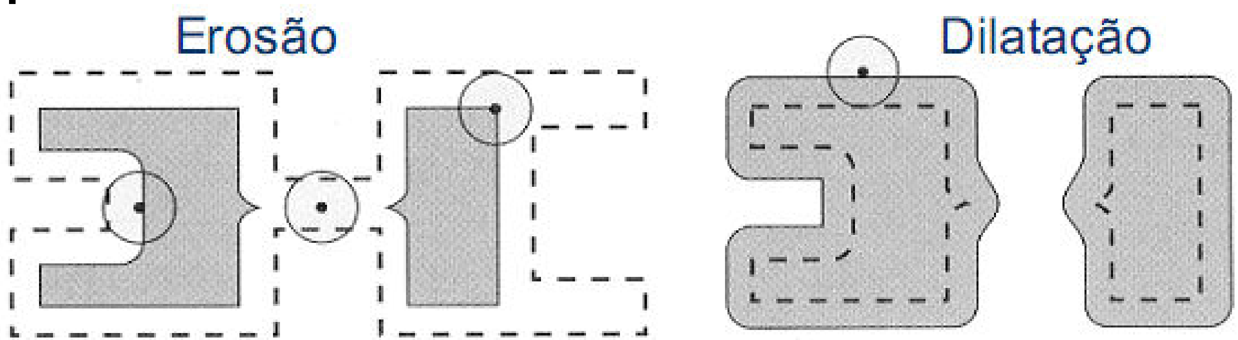
Erosão

- $A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$



Considerações

- A dilatação expande uma imagem;
- A erosão reduz uma imagem;
- Erosão e dilatação não são operações complementares.



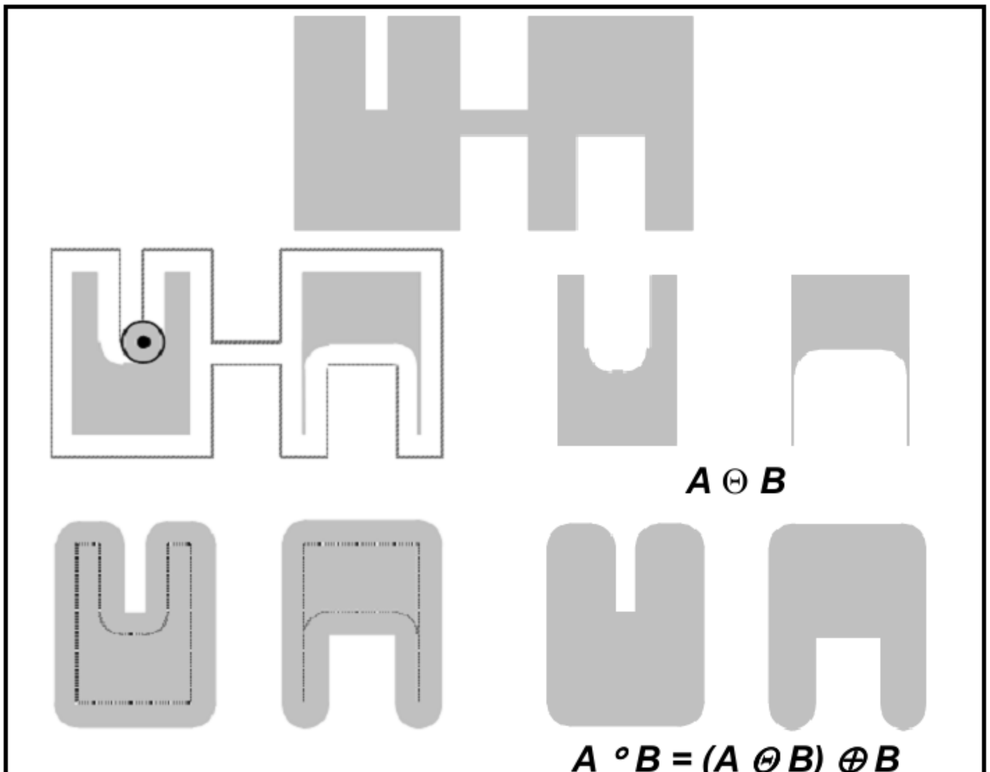
- Erosão e dilatação são duais entre si com respeito à complementação e reflexão:

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

Abertura

- Suaviza contornos, quebra istmos estreitos e elimina proeminências delgadas.

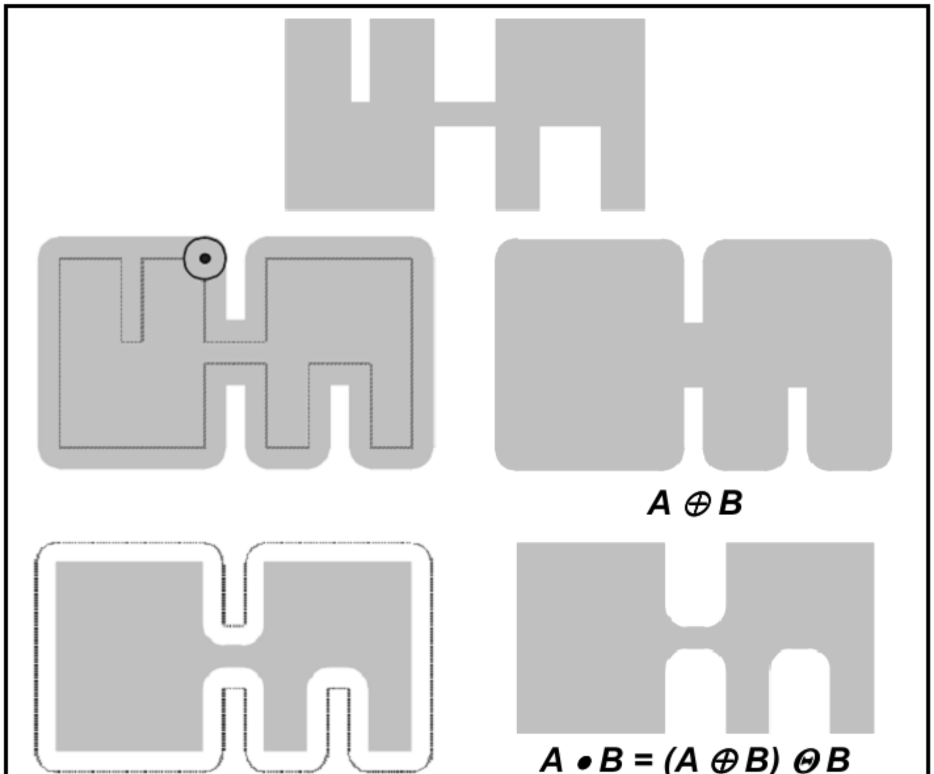
$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



Fechamento

- Funde pequenas quebras, alonga os golfos finos, elimina pequenos orifícios e preenche falhas no contorno.

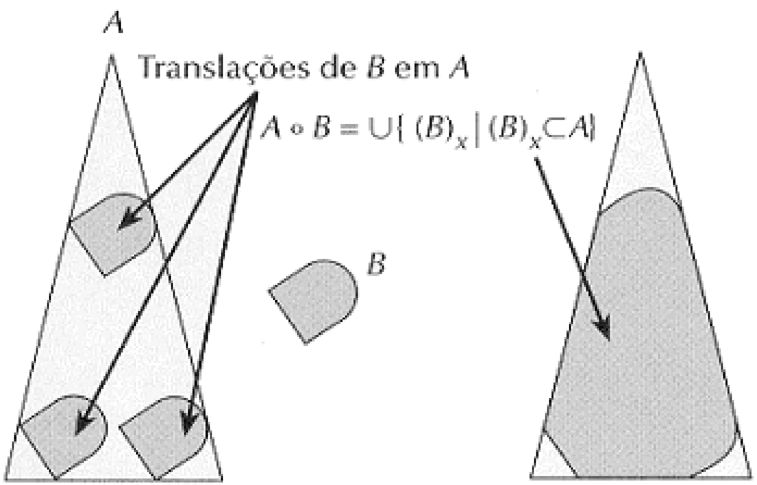
$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

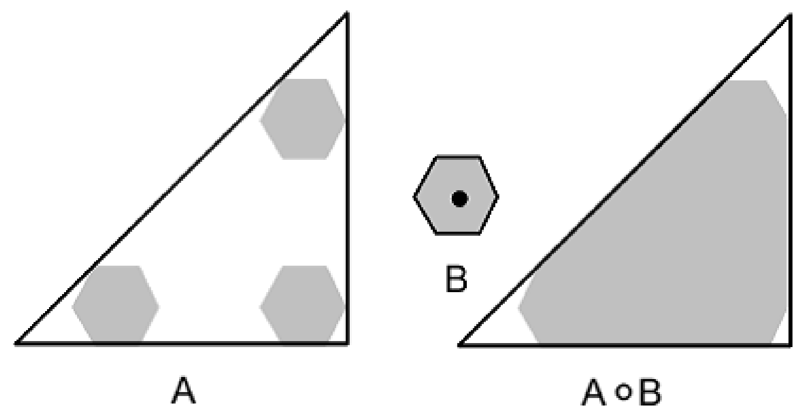


Interpretação Geométrica da Abertura

- $A \circ B$ é composta pela união de todas as translações de B que caibam em A.

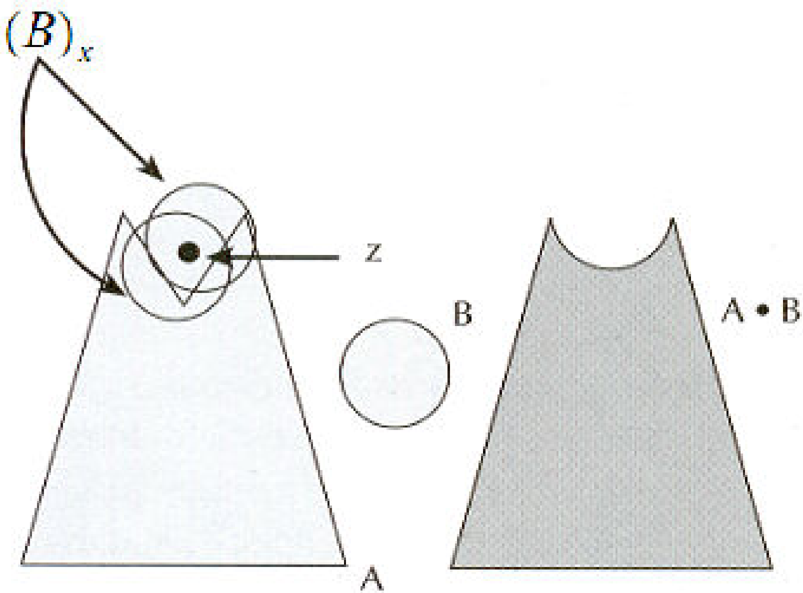
$$A \circ B = \cup\{(B)_x \mid (B)_x \subset A\}$$

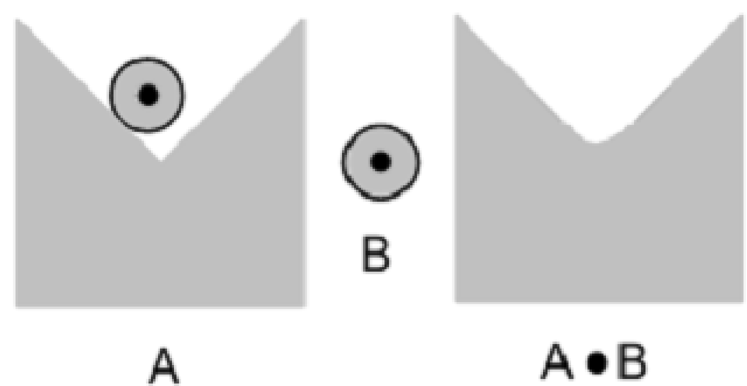




Interpretação Geométrica do Fechamento

- um ponto ***z*** é um elemento de $\boldsymbol{A \bullet B}$ se, e somente se, $\boldsymbol{(B)_x \cap A \neq \phi}$ para qualquer translação de ***(B)*** que contenha ***z***.





Propriedades

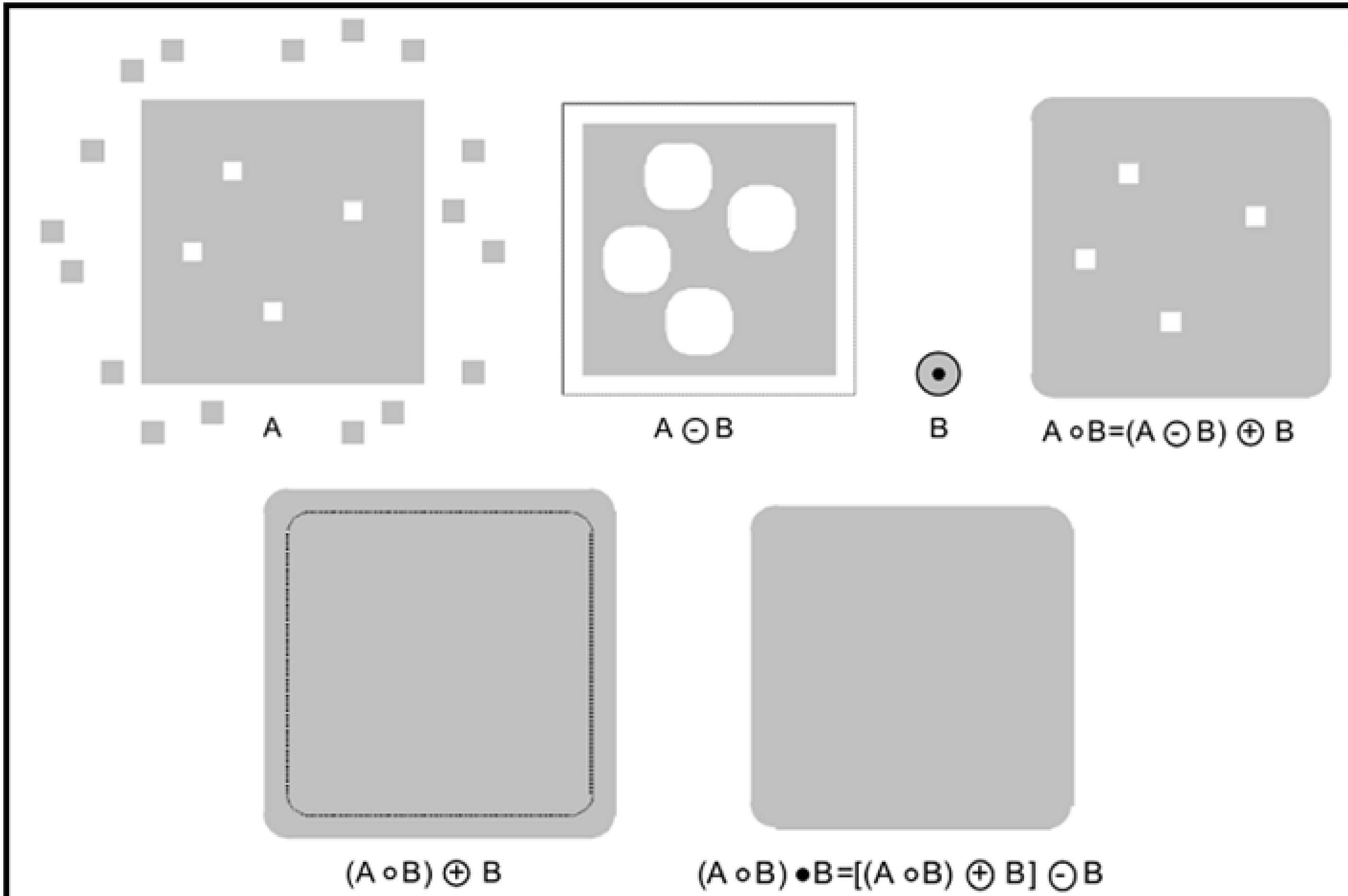
- A abertura e o fechamento são operações duais em relação à complementação e reflexão.

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

- Propriedades da abertura:
  - $A \circ B$ é um subconjunto (sub-imagem) de A;
  - Se C é um subconjunto de D, então $C \circ B$ é um subconjunto de $D \circ B$;
  - $(A \circ B) \circ B = A \circ B$.
- Propriedades do fechamento:
  - A é um subconjunto $A \bullet B$;
  - Se C é um subconjunto de D, então $C \bullet B$ é um subconjunto de $D \bullet B$;
  - $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$.

Exemplo de Filtro Morfológico

- Remoção de ruídos

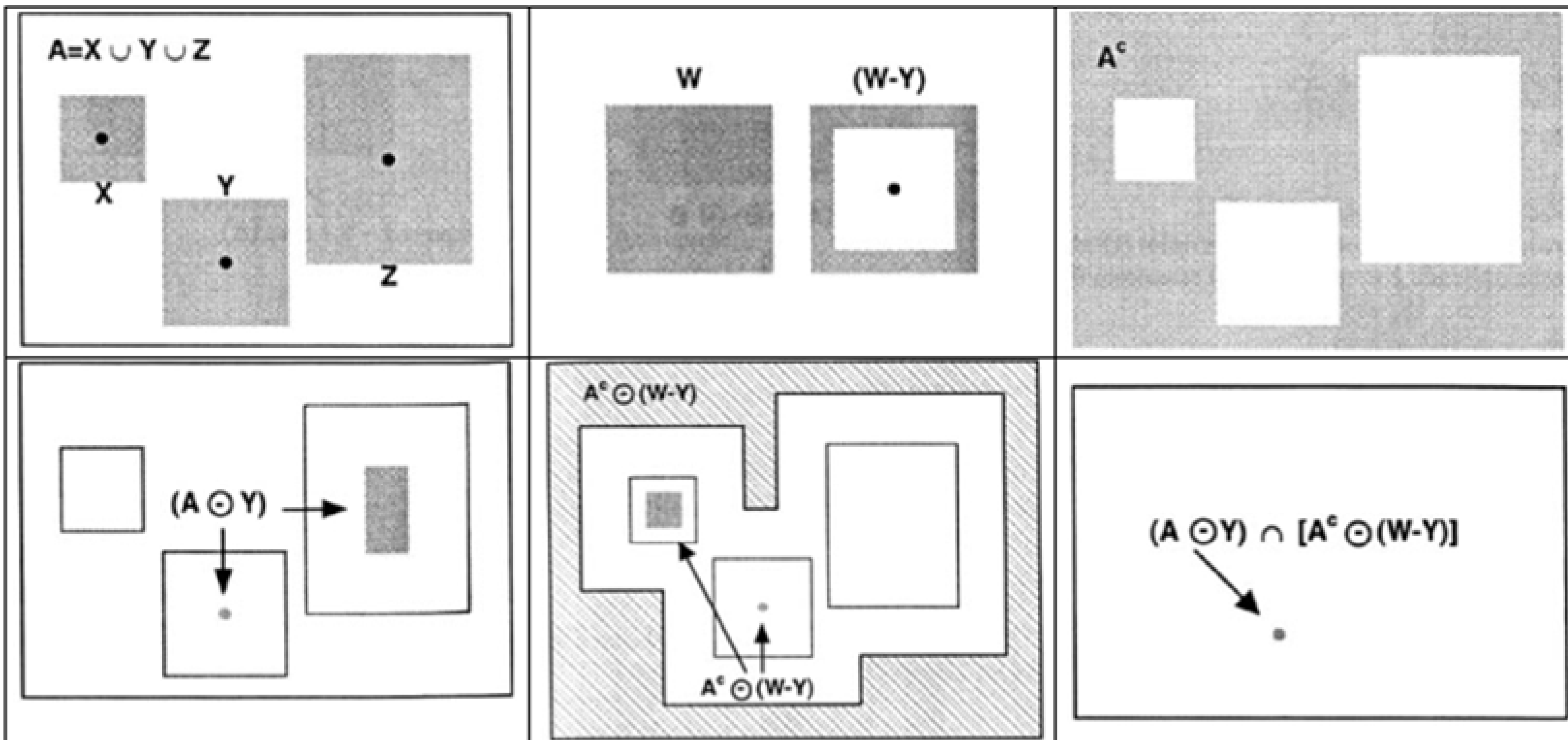


Transformação Hit-or-Miss

- Reconhecimento de padrões.

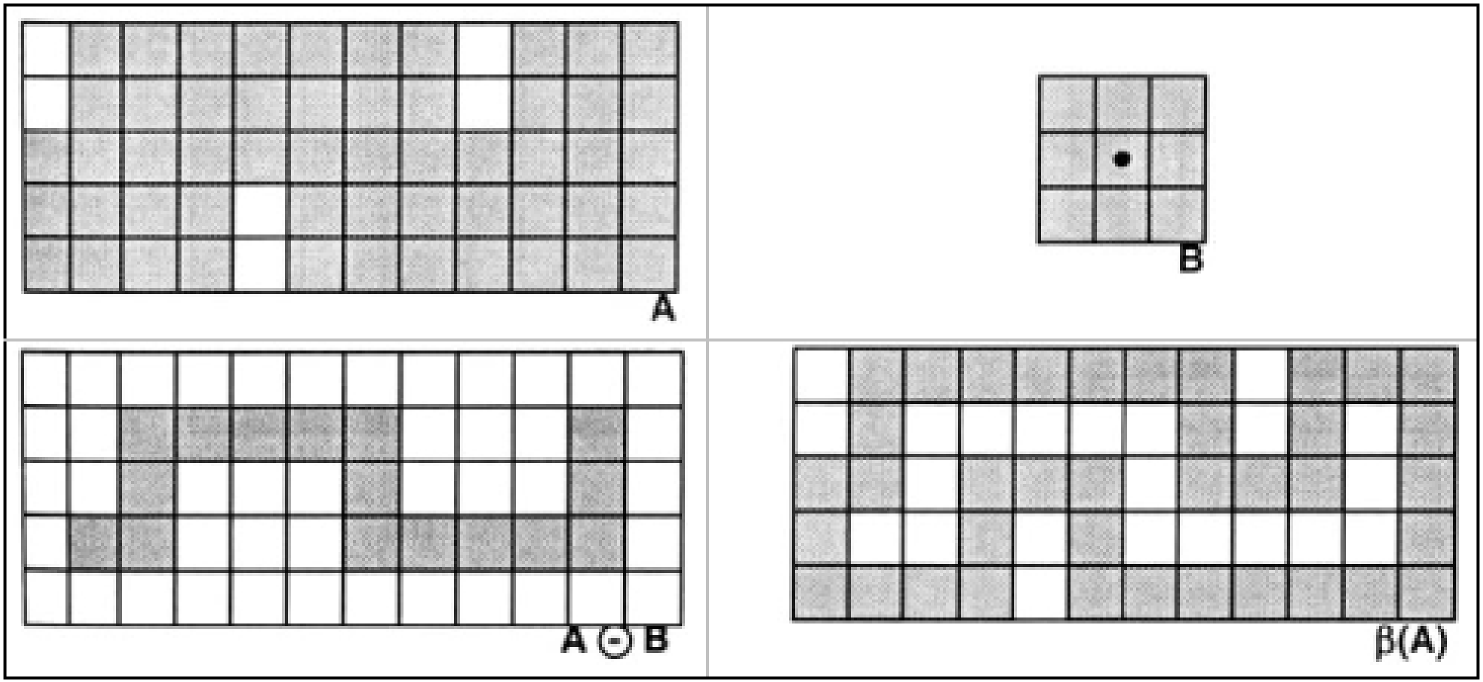
$$A \text{ hom } B = (A \ominus Y) \cap [A^c \ominus (W - Y)]$$

$$B_1 = Y \text{ e } B_2 = (W - Y) \longrightarrow A \text{ hom } B = (A \ominus B_1) \cap [A^c \ominus B_2]$$



Extração de Contornos

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



Preenchimento de Regiões

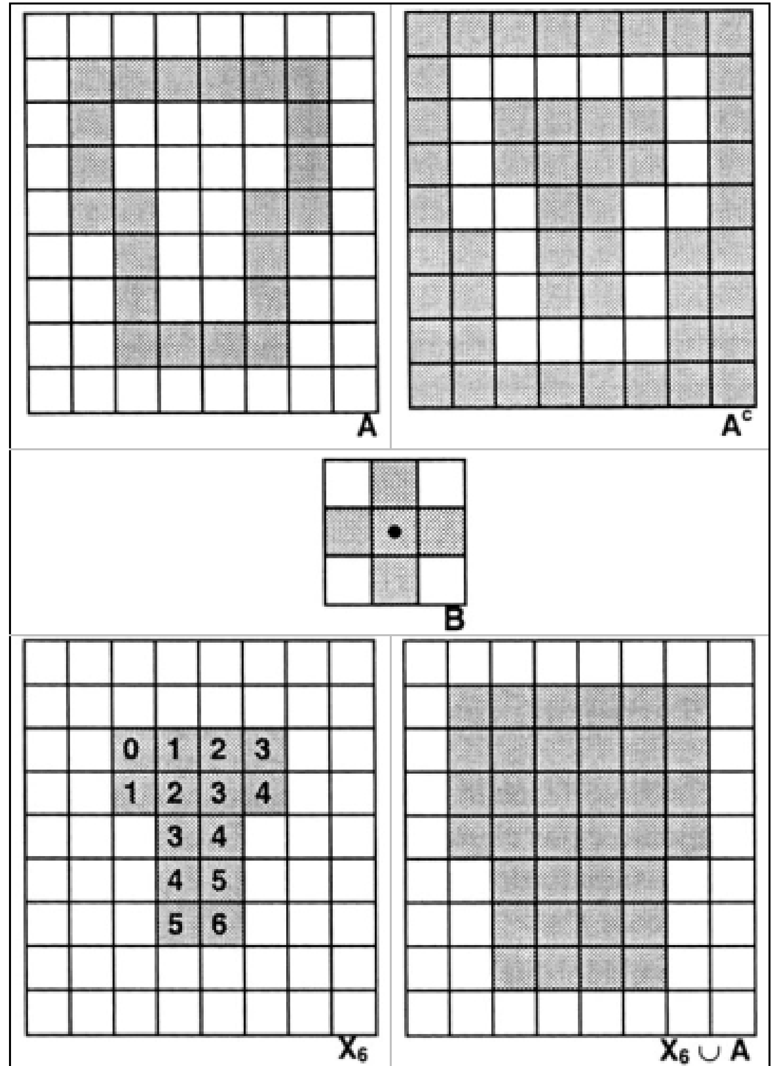
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$X_0 = p$$

p é um ponto interno à borda

$$Ap = X_k \cup A$$



Extração de Componentes Conectados

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$$

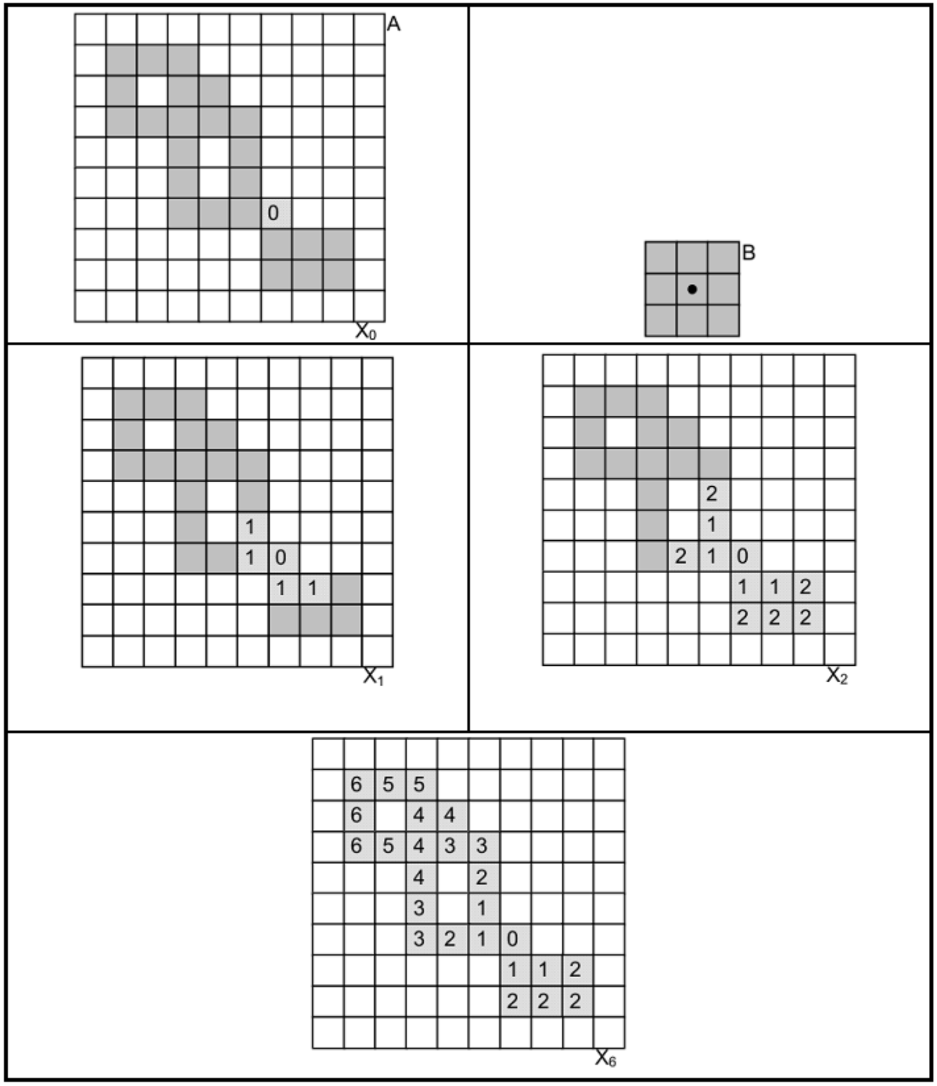
$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$X_0 = p$$

Y é um conjunto conectado em *A*

p é um ponto de *Y*

$$Y = X_k$$



Casco Convexo

$$X^i_k = (X \text{ hom } B^i) \cup A$$

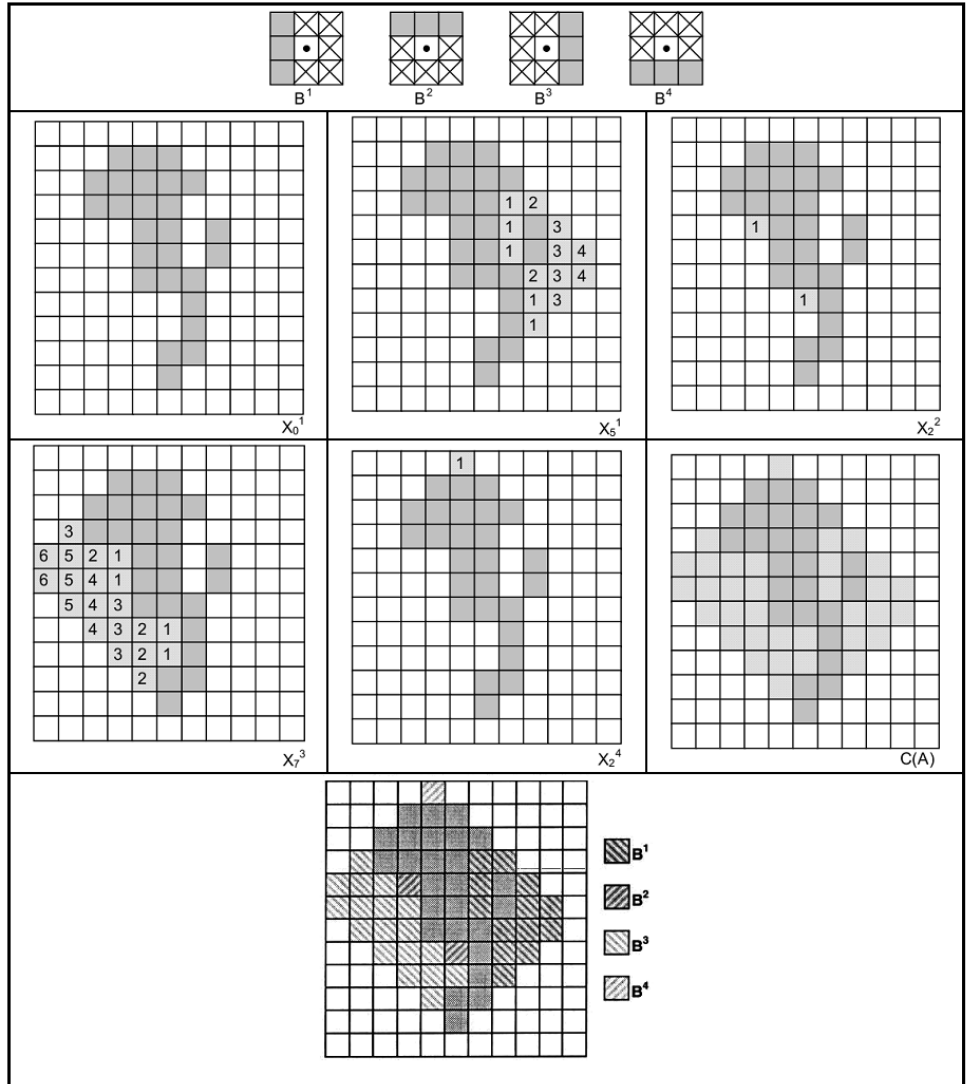
$$i = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$X^i_0 = A$$

$$D^i = X_{iconv} \rightarrow X^i_k = X^i_{k-1}$$

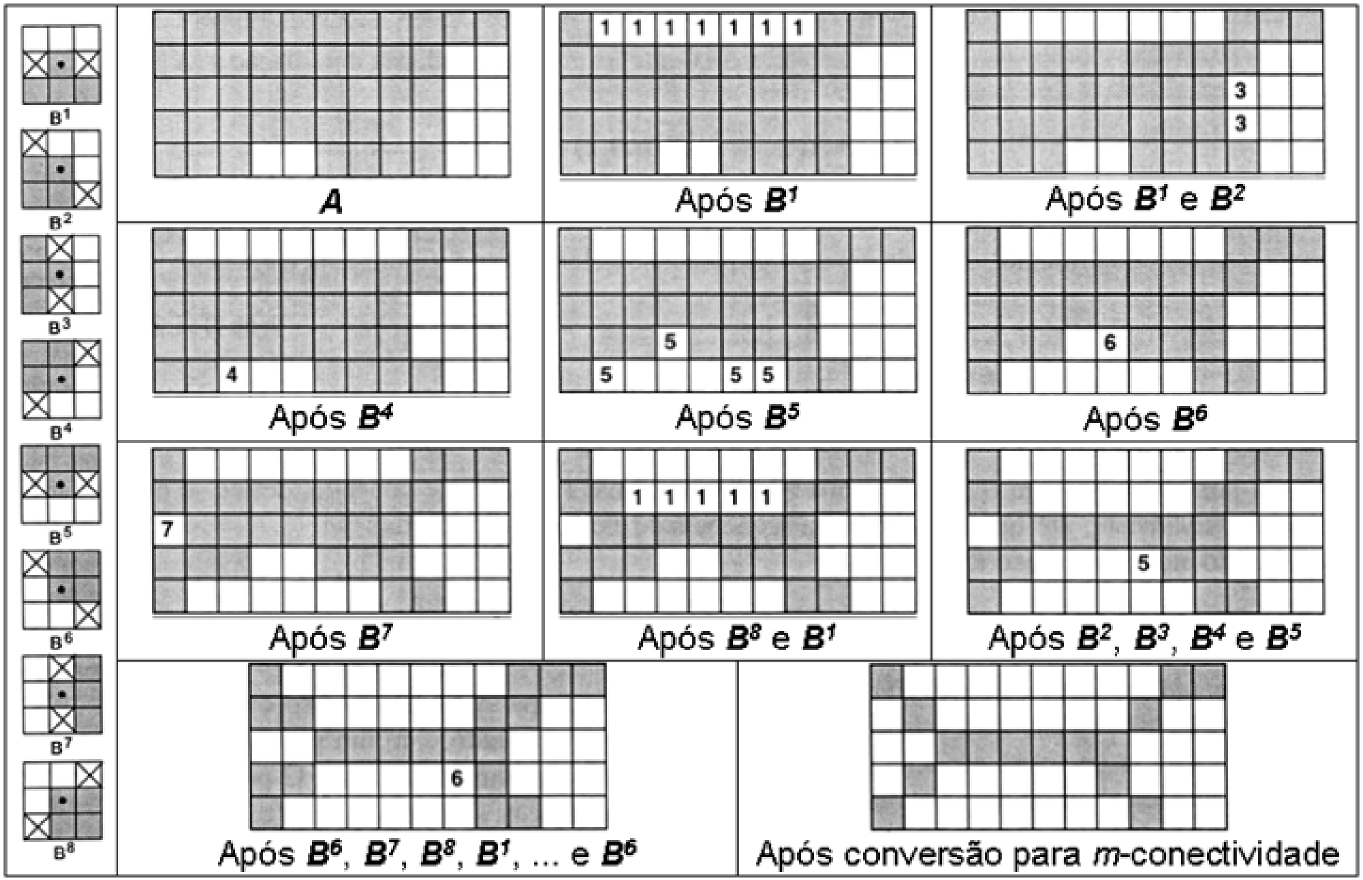
$$C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D^i$$



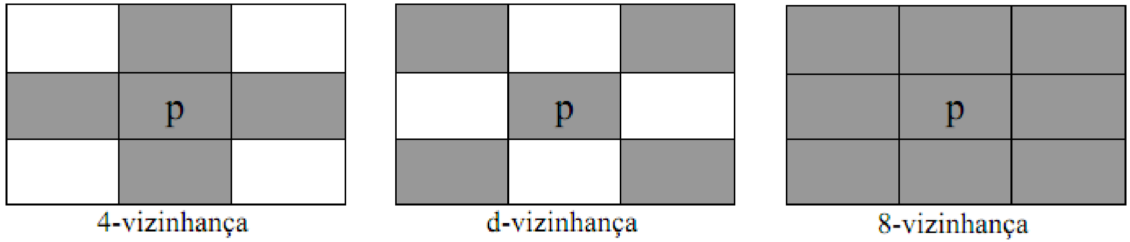
Afinamento

$$A \otimes B = A - (A \text{ hom } B) \text{ ou } A \otimes B = A \cap (A \text{ hom } B)^c$$

$$A \otimes \{B\} = ((\ldots((A \otimes B1) \otimes B2)\ldots) \otimes Bn)$$



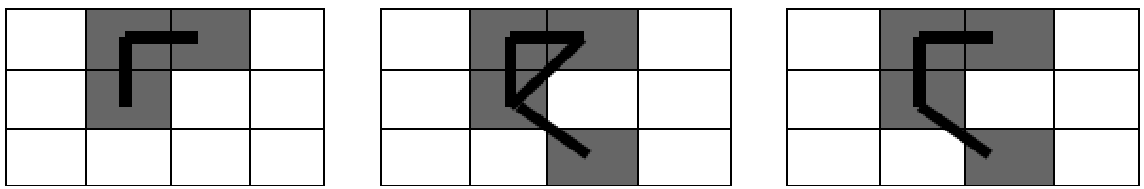
Conectividade



- Dois pixels são conectados se:
  - São vizinhos segundo algum critério de vizinhança;
  - Existe um critério de similaridade entre estes pixels.
- Critério de conectivadade:
  - 4-conectividade: p e q satisfazem critério de similaridade e q é 4-vizinho de p;
  - 8-conectividade: p e q satisfazem critério de similaridade e q é 8-vizinho de p;
  - m-conectivade: p e q satisfazem critério de similaridade e:
    - $q \in N4(p)$ ou
    - $q \in Nd(p)$ e $N4(p) \cap N4(q) = \emptyset$

Conectividade

- m-conectividade:
  - q ∈ N4(p) ou
  - q ∈ Nd(p) e N4(p)∩N4(q) = ∅.



4-conectividade   8-conectividade   m-conectividade

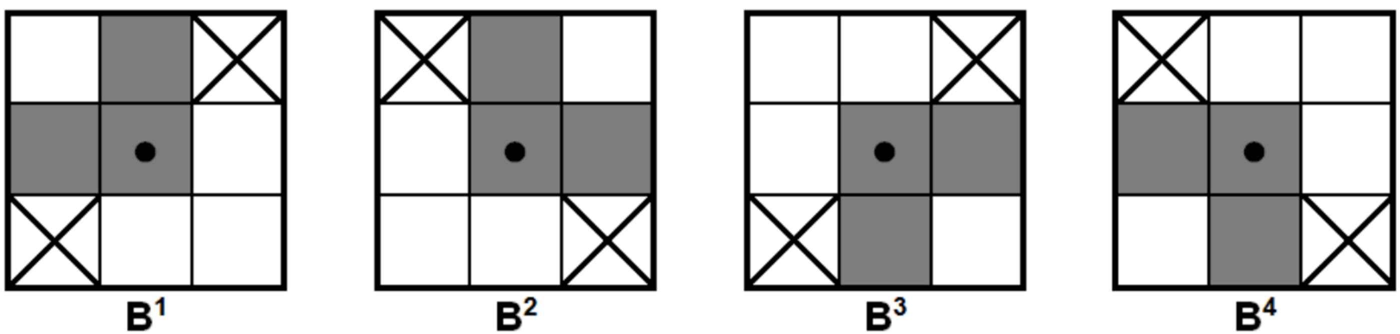
- Imagens monocromáticas:
  - Seja V = {32, 33, 34, 35, ..., 63, 64};
  - p = 34 e q = 54 estão 4-conectados.

0	200	2
198	34	54
10	200	3

Exemplo de conectividade

m-conectividade

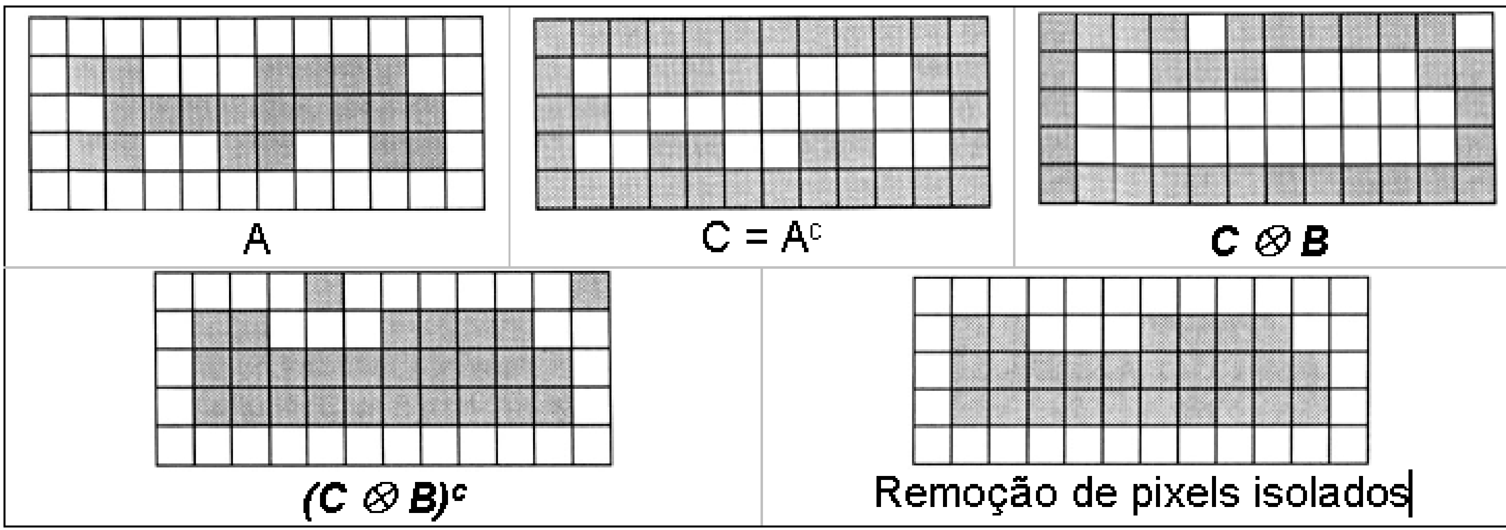
- m-conectividade é o último passo do algoritmo de afinamento; seu objetivo é descartar os múltiplos caminhos possíveis entre dois pixels.
- Para se obter uma imagem em m-conectividade aplica-se a transformação hit-or-miss com as imagens abaixo. Em cada hit elimina-se o pixel analisado.



Espessamento

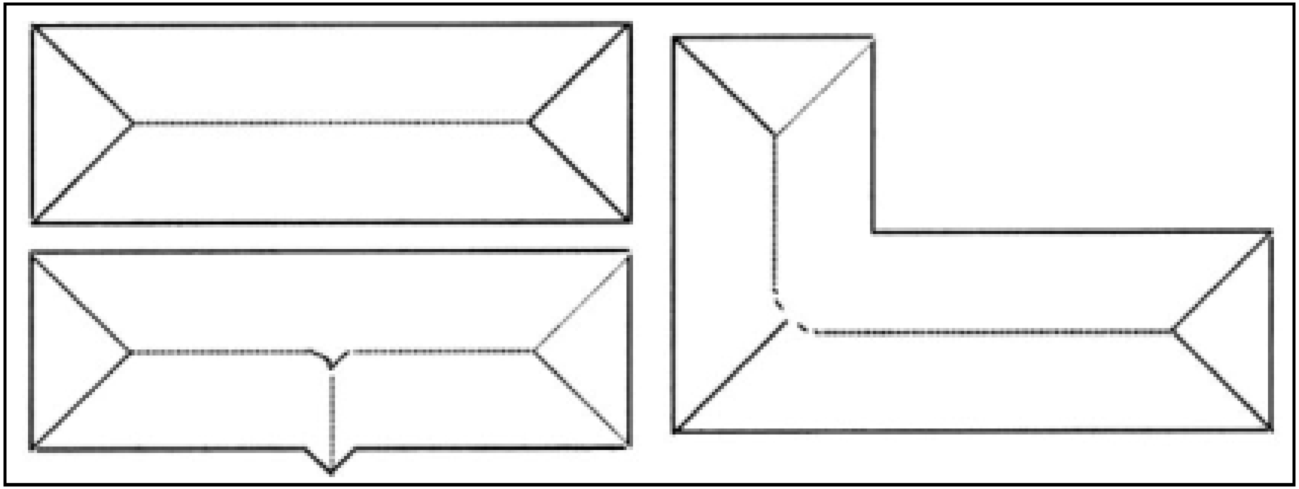
$$A \text{ thi } B = A \cup (A \text{ hom } B)$$

$$A \text{ thi } \{B\} = ((\ldots((A \text{ thi } B^1) \text{ thi } B^2)\ldots) \text{ thi } B^n)$$



Esqueletos

- Esqueleto→Transformação do Eixo Médio (MAT);
- MAT de uma região ***R*** com fronteira ***B***:
  - "Para cada ponto ***p*** em ***R***, encontra-se seu vizinho mais próximo em ***B***. Se ***p*** tem mais de um vizinho à mesma distância mínima, diz-se que ***p*** pertence ao eixo médio (esqueleto) de ***R***".



Esqueleto – S(A)

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$$

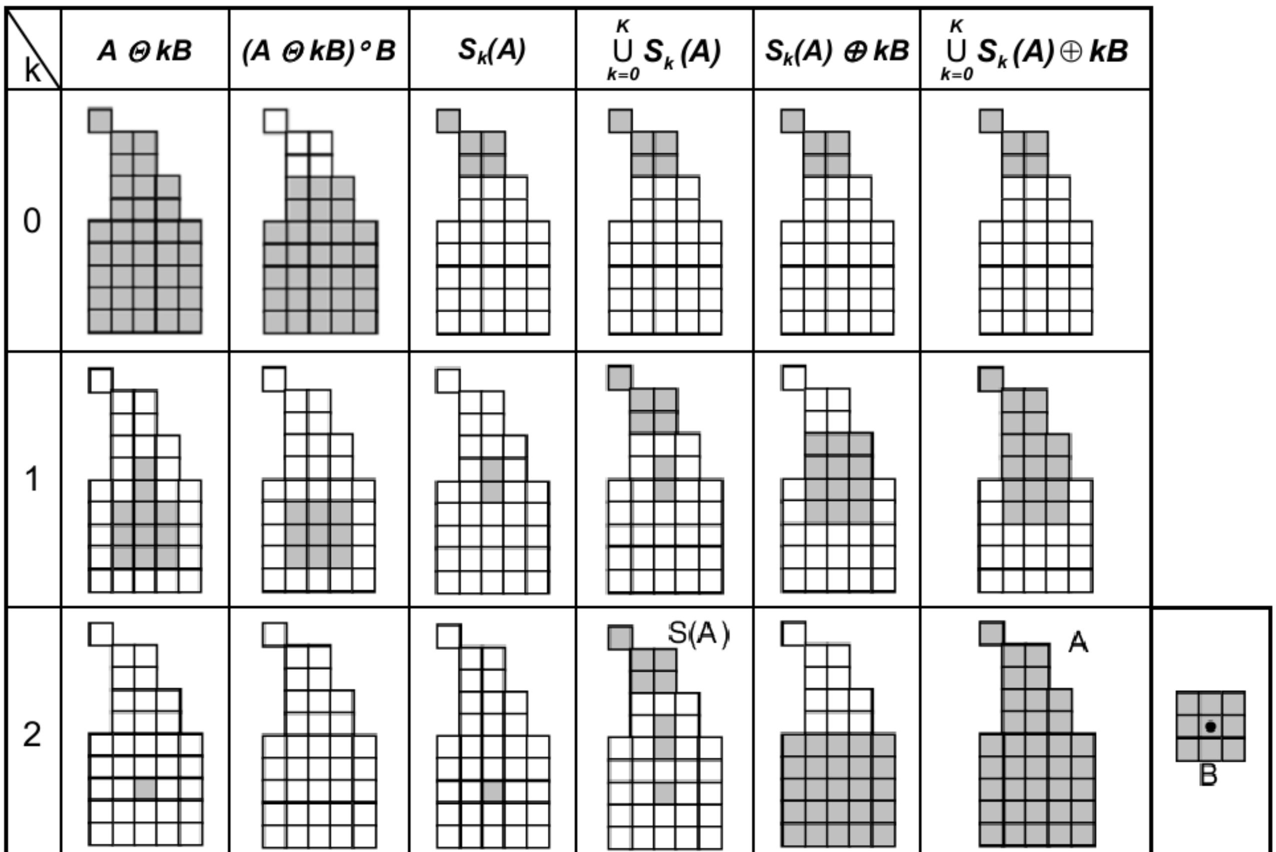
$$S_k(A) = \bigcup_{k=0}^{K} \{(A \Theta kB) - [(A \Theta kB) \circ B]\}$$

$$A = \bigcup_{k=0}^{K} (S_k(A) \oplus kB)$$

- ***(A Θ kB)*** indica ***k*** erosões sucessivas de ***A***, ou seja:
  - ***(A Θ kB) = ((...(A Θ B) Θ B)...) Θ B;***
  - ***K*** é o último passo iterativo antes de ***A*** resultar, por erosão, em um conjunto vazio***;***
  - ***K = Max{k | (A Θ kB) $\neq \emptyset$}.***

Esqueleto – S(A)

- Não traz resultados perfeitos;
- Pode-se reconstruir A a partir de $S_k(A)$.



Poda

- Remove pixels parasitas da imagem, como aqueles que surgem após uma operação de afinamento.
- Aplicam-se a expressões X_1 e X_3 i vezes; onde i é o comprimento do ramo parasita.

$$X_1 = A \otimes \{B\}$$

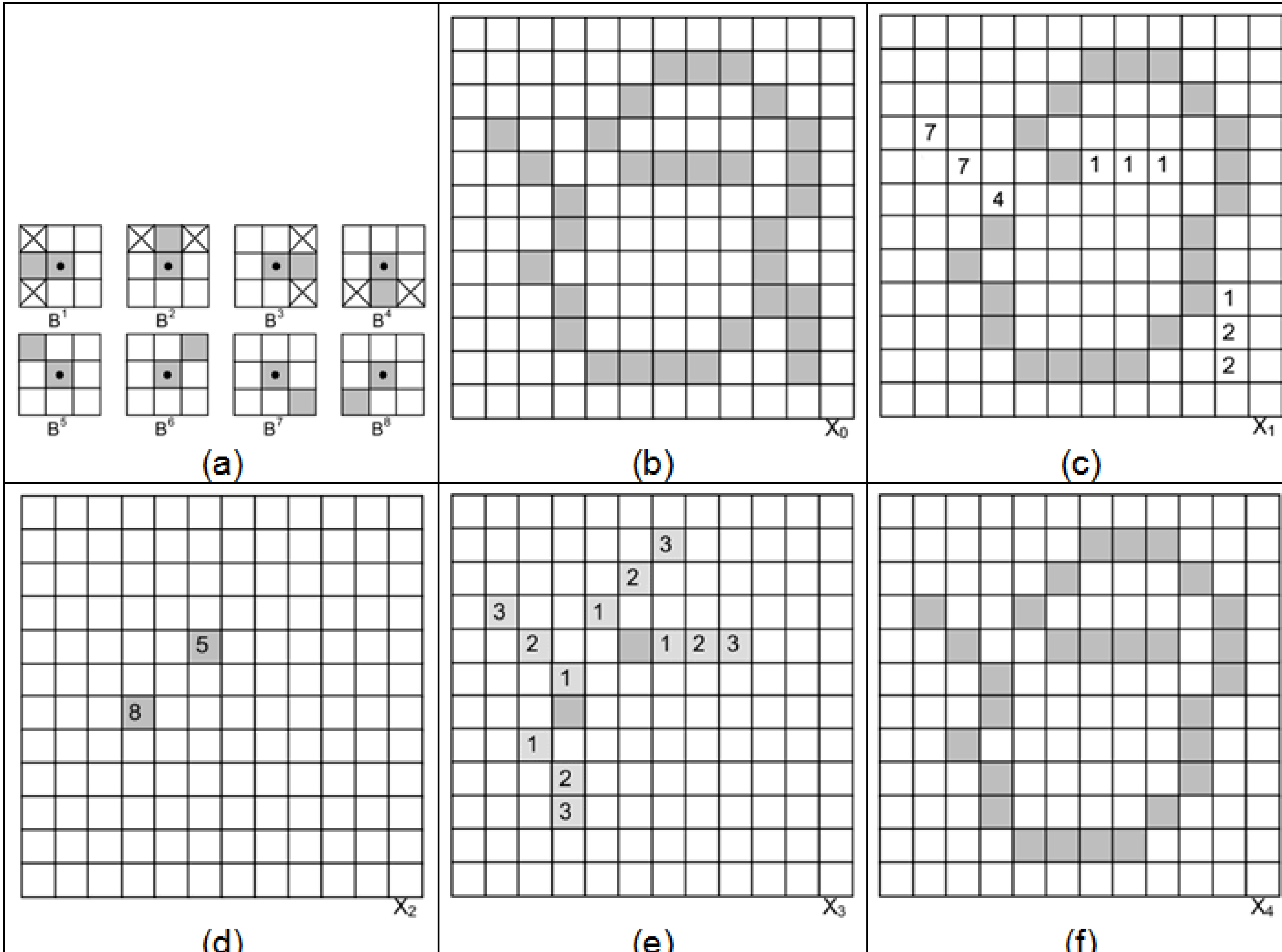
$$X_2 = \bigcup_{k=1}^{8} \left(X_1 \, hom \, B^k \right)$$

$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$$

$$X_4 = X_1 \cup X_3$$

H = Elemento estruturante 3x3

Poda



B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
B8
(a)
X0
(b)
7
7
4
1 1 1
1
2
2
X1
(c)
5
8
X2
(d)
3
2
3
1
2
1 2 3
1
1
2
3
X3
(e)
X4
(f)