**Unioeste - Universidade Estadual do Oeste do Paraná**
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
Colegiado de Matemática
***Curso de Licenciatura em Matemática***

# Maneiras de lidar com a matemática: o que estudantes de um curso de engenharia mostram saber diante de questões envolvendo o conceito de limite

*Guilherme Gasparini Lovatto*

**CASCAVEL**
**2020**

**GUILHERME GASPARINI LOVATTO**

# MANEIRAS DE LIDAR COM A MATEMÁTICA: O QUE ESTUDANTES DE UM CURSO DE ENGENHARIA MOSTRAM SABER DIANTE DE QUESTÕES ENVOLVENDO O CONCEITO DE LIMITE

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel

Orientador: Prof.ª Dra. Andréia Büttner Ciani

CASCAVEL
2020

**GUILHERME GASPARINI LOVATTO**

# MANEIRAS DE LIDAR COM A MATEMÁTICA: O QUE ESTUDANTES DE UM CURSO DE ENGENHARIA MOSTRAM SABER DIANTE DE QUESTÕES ENVOLVENDO O CONCEITO DE LIMITE

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel, aprovada pela Comissão formada pelas professoras:

Prof.ª Dra. Andréia Büttner Ciani (Orientadora)
Colegiado de Matemática, UNIOESTE

Prof.ª Msc. Pamela Gonçalves
Colegiado de Matemática, UNIOESTE

Prof.ª Msc. Sônia Cristina Maciel
SEED - PR

Cascavel, 12 de julho de 2021

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe, que por toda minha vida me apoiou e esteve comigo nos momentos mais difíceis me incentivando a não desistir.

Aos meus avós e tios, pelos conselhos e por sempre estarem ao meu lado nos obstáculos da vida.

À minha professora e orientadora, Andréia Büttner Ciani, pelo acolhimento, por sempre me encorajar a novos desafios, pelos conselhos e por todo carinho e dedicação.

À todos professores que dedicam suas vidas à docência, em especial, aos que fizeram parte de minha trajetória.

Às professoras Pamela Gonçalves e Sônia Cristina Maciel, pelo aceite em compor a banca de defesa desta pesquisa e pelas contribuições com o andamento do trabalho.

Aos meus colegas de turma, por todas as discussões e pela união em todos os momentos difíceis.

À Universidade Estadual do Oeste do Paraná, por todas as oportunidades, sobretudo pelo crescimento profissional e acadêmico.

À todas as pessoas que, direta ou indiretamente, influênciaram no meu crescimento.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Lista de Abreviaturas e Siglas

| | |
|---|---|
| Cálculo | Cálculo Diferencial e Integral I |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| IDEB | Índice de Desenvolvimento da educação Básica |
| PIBIC | Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica |
| RME | Educação MAtemática Realística (Realistic Mathematics Education) |
| TAPE | Tarefas de Análise da Produção Escrita |
| Unioeste | Universidade Estadual do Oeste do Paraná |

# Sumário

# Resumo

Esta pesquisa se originou da sensibilização aos entraves enfrentados pela maioria dos alunos que adentram à Universidade e se veem em meio à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. O conhecimento do índice de permanência e de reprovação do Cálculo que se faz presente nesta pesquisa representando parte das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ingressantes em um curso de graduação da área de Ciências Exatas no que diz respeito à matemática acadêmica, neste caso o que imerge e emerge ao conceito de Limite. Buscamos sistematicamente trabalhos que tratam da Análise da Produção Escrita e Ensino de Cálculo para sofisticar nosso embasamento teórico, evidenciando que problemas no Ensino e Avaliação de Cálculo já ocorrem por décadas. Nos pautamos na Avaliação como oportunizade de aprendizagem, portanto, como uma prática de investigação da atuação docente e da aprendizagem do estudante. Alem disso, baseamo-nos nas premissas da Análise da Produção Escrita, analisando as maneiras que os estudantes lidam com questões envolvendo o conceito de Limite em uma prova escrita na disciplina de Cálculo de um curso de Engenharia a fim de responder: o que estudantes de um curso de engenharia mostram saber sobre conceito de Limite? Realizamos leituras das produções escritas, construindo uma análise, discussão e, então, formação de agrupamentos e categorias. A Análise da Produção Escrita nos mostrou que a dificuldade no Cálculo não reside apenas na matemática acadêmica, a maioria dos estudantes não resolveu as questões envolvendo o conceito de limite por problemas com a matemática escolar, conceitos matemáticos estudados no nível fundamental e médio. Elaboramos algumas propostas de intervenções, para situações futuras de ensino e aprendizagem de Cálculo, baseadas na análise das produções escritas, levando em consideração instrumentos de avaliação da Educação Matemática Realística: prova em fases, vaivém e TAPE.

**Palavras-chave:** Avaliação da aprendizagem; Análise da Produção Escrita em Matemática; Ensino de Cálculo; Conceito de Limite.

# Capítulo 1

# Introdução

O presente trabalho de conclusão de curso, que se configura em um texto em forma de monografia, tem como tema o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral I. Na literatura de pesquisa, pelo viés da Educação Matemática, este tema já possui ampla bibliografia. Assim, tivemos que escolher um corte para estabelecer um foco em nossa pesquisa. O foco escolhido foi a avaliação da aprendizagem e, dentro desta subárea de pesquisa, nos pautamos na Análise da Produção Escrita e nos conceitos de matemática escolar e matemática acadêmica como um dos caminhos para buscar compreensões sore o ensino e aprendizagem de Cálculo em um momento de transição da Educação Básica para o Ensino Superior.

Mais especificamente, lançamos nosso olhar para as produções escritas de um grupo de estudantes em um momento de avaliação e nos utilizamos da análise de conteúdo para investigar o que as produções escritas, deste grupo referido, poderiam nos revelar para além de uma correção tradicional.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tem um grande impacto na vida acadêmica da maioria dos estudantes, em cursos da área de Ciências Exatas e em outros que tenham esta disciplina em sua grade curricular, do Ensino Superior. Este impacto, à primeira vista, aparece associado ao alto índice de reprovação que ocorre, tradicionalmente, nesta disciplina, e à alta desistência dos estudantes nestes cursos.

A maioria das graduações em Engenharia, Física, Matemática e Química, por exemplo, trazem o Cálculo Diferencial e Integral I como sendo uma disciplina de primeiro ano, em sua grade curricular. Neste sentido, temos como hipótese que o alto índice de reprovação e a desistência sejam devidos ao fato de que esta disciplina, em geral, se caracterize como o primeiro contato do estudante com a matemática acadêmica. Outra hipótese que nos serve de motivadora de nossos estudos e pesquisas sobre o Ensino de Cálculo e que se sustenta em nossa experiência acadêmica é que este impacto seja também devido à forma com que esta matemática "nova" é abordada, ou seja, à metodologia de ensino utilizada pelo professor.

Em nossa pesquisa, não trataremos a matemática como "básica" e/ou "avançada" para representar a matemática que se estuda na escola e aquela que se estuda no ensino superior, pois ambas as ideias vão além de termos, empregam significados e saberes, nesse sentido, utilizaremos matemática escolar e matemática acadêmica.

> Matemática escolar, vista como um conjunto de práticas e saberes associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática (que não se restringem ao que se ensina aos alunos na escola, porque inclui também, por exemplo, os saberes profissionais vinculados ao trabalho docente nesse processo); Matemática acadêmica, vista como um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal (DAVID; MOREIRA; TOMAZ, 2013, p.45).

A matemática escolar deveria preparar o aluno para diferentes realidades envolvendo a Matemática, inclusive para aquela na qual ele ingressa ao adentrar em um curso de graduação, cujo corpo científico está totalmente apoiado e voltado para a matemática acadêmica. Entretanto, o que ele se depara é com um "abismo" entre essas duas realidades, e que se apresenta abruptamente ao estudante, logo no início de sua trajetória acadêmica. Muito frequentemente, é na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I que o tal "abismo" se torna visível ao estudante e professor.

Novos conceitos e uma nova linguagem lhes são apresentados, compondo um novo cenário, bastante diferente daquele no qual o estudante viveu tanto anos de sua trajetória escolar na Educação Básica. Porém, este novo cenário, diverso e mais complexo que o anterior, e quando não até contraditório, leva o mesmo nome do cenário vivido na Educação Básica, Matemática. Ao se deparar com tamanha divergência, mas, ao mesmo tempo, similaridades pontuais, o estudante se vê em situações contraditórias, ao mesmo tempo que identifica similaridades, percebe discrepâncias, ora busca estabelecer uma ponte, uma amálgama entre os dois conhecimentos, ora se vê obrigado a abandonar o que já fora aprendido e iniciar do zero, sem mesmo conseguir utilizar o que foi estudado anteriormente, ficando com a ideia de que tudo que conheceu e aprendeu não será utilizado novamente.

Os pesquisadores Pereira, Mondini e Mocrosky (2019) apontam que,de fato, o Cálculo Diferencial e Integral protagoniza os maiores índices de reprovações, gerando, por consequência a evasão de cursos de graduação. Estas pesquisas corroboram as nossas observações e vivências enquanto estudante e professora da disciplina nos cursos de Engenharia Civil, Agrícola, Matemática e Administração. Estas vivências provocaram em nós algumas conjecturas e hipóteses, a respeito do ensino de Cálculo que encontram respaldo em diversas pesquisas acadêmicas. A dificuldade da inserção do estudante no mundo novo da matemática acadêmica e as sucessivas reprovações, além de gerarem um acúmulo de carga horária difícil de ser administrada, acabam sendo as razões principais a deixar esse estudante em um “limbo” de conteúdos abstratos e sem significados o que, muitas vezes, implica na desistência do curso.

Lacaz, Carvalho e Fernandes (2007) realizaram uma pesquisa qualitativa com alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos de engenharia da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG/UNESP) no ano de 2006. Tinham como objetivo identificar as principais dificuldades dos alunos, nessa disciplina, a fim elaborar estratégias para superá-las ou minimizá-las. A partir das respostas ao questionário aplicado, os autores concluíram que os alunos apresentavam conhecimento insuficiente da matemática básica, para que obtivessem um bom desempenho em Cálculo, revelando dificuldades na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. A análise dos resultados mostrou que, ao iniciarem o estudo do Cálculo, os alunos ”[...] sentem um abismo entre o que foi aprendido no Ensino Básico e o que lhes é requerido no Ensino Universitário, e revelam dificuldades no entendimento da linguagem do professor”(LACAZ; CARVALHO; FERNANDES, 2007, p.9).

## 1.1 Justificativa

A turma de Cálculo Diferencial e Integral de 2015 do Curso de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) campus Cascavel-PR apresenta índice de $50\%$ de reprovação. Alguns podem achar normal metade da turma reprovar, outros podem dizer que o conteúdo é abstrato. No entanto, o que de fato levou tantos estudantes a reprovarem nesta disciplina? Realizamos uma análise de dados no ano de 2020, fornecido pela Unioeste, através do sistema de gestão acadêmica, o Academus, para verificar a situação da turma. Os dados utilizados foram resultado da disciplina, quantidade de vezes que cada acadêmico desta turma curso o Cálculo e situação da matrícula na disciplina e no curso (cancelado, cursando, formado, trancado), na qual constatamos os índices apresentados na Figura 1.1 descritos logo em seguida.

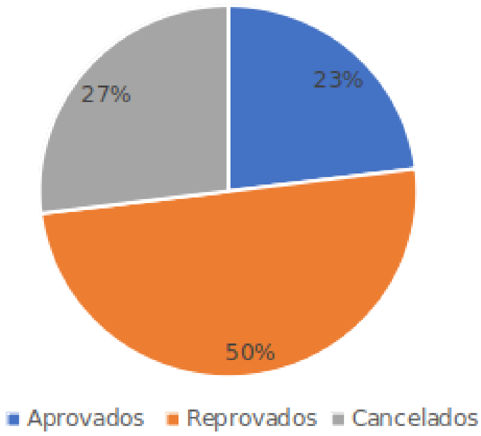



Figura 1.1: Resultado da disciplina
Fonte: Elaborado pelo autor com dados do Academus

Inicialmente, esta disciplina tinha 52 matriculados, entretanto, como podemos observar na Figura 1.1, 27% dos acadêmicos cancelaram a matrícula, ou seja, 14 cancelados, e 23% foram aprovados, isto é, 12 acadêmicos. É notável que o número de aprovações é o menor dentre os cancelados e reprovados, diante disso, realizamos outra busca de dados destes acadêmicos, agora com o intuito de analisar como foi o trajeto desses estudantes na disciplina de Cálculo.

Podemos notar que dois acadêmicos cursaram dez vezes a disciplina, sendo que um deles não conseguiu aprovação, e teve sua matrícula cancelada, bem como outro acadêmico que cursou nove vezes! Ressaltamos também, que dos 52 acadêmicos, apenas 9 conseguiram aprovação na primeira vez que cursaram a disciplina e 1 acadêmico que ainda está cursando fez a disciplina 4 vezes, ou seja, poderá se matricular pela quinta vez. Diante disso, o Cálculo Diferencial e Integral I tem um grande impacto na vida acadêmica de um estudante de nível superior por conta se seu alto índice de reprovação, e um dos fatores que influenciam na defasagem é a maneira que os conteúdos são abordados, ou seja, a metodologia utilizada para ensinar o Cálculo, tendo em vista que são apresentados conceitos que talvez nunca tivessem sido vistos anteriormente pelo estudante, durante seu percurso pela Educação Básica, acrescidos ainda do rigor na

Tabela 1.1: Dados da disciplina
Fonte: Elaborado pelo autor com dados do Academus

| **Quantidade de vezes cursadas** | **Quantidade de acadêmicos** | **Sem aprovação** | **Sem aprovação e cursando** | **Formados** | **Cancelados** | **Cursando** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 3 | 0 | 9 | 9 | 0 |
| 2 | 8 | 4 | 0 | 0 | 6 | 2 |
| 3 | 5 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 6 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

linguagem matemática inerente à matemática acadêmica. Além disso, Rezende (2003), em sua tese de doutorado, se propôs a provar que os problemas com a aprendizagem do Cálculo são de natureza essencialmente epistemológica. Então,

> [...] seria realmente o curso de Cálculo imprescindível para alguns destes cursos de ensino superior? E qual é a razão de tantas reprovações? Onde reside a dificuldade? No processo de aprendizagem? No aluno, isto é, na "falta de base" do aluno? Ou estaria esta dificuldade no próprio professor, ou na metodologia de ensino, ou ainda, na estrutura curricular do ensino de matemática que não dá o suporte que esta disciplina mereceria? (REZENDE, 2003, p.4)

A metodologia utilizada pelo professor faz parte do processo de ensino e aprendizagem, além disso, neste processo a avaliação é fundamental na aprendizagem do estudante, quando não está presa apenas a expressar juízo de valor, apenas para quantificar o conhecimento, aprovar ou reprovar. O que de fato ocorre há muito tempo, segundo Buriasco (2000) a avaliação educacional vem exercendo um papel de seleção, sobretudo no ensino de matemática e, normalmente, é com ela que o professor decide a trajetória escolar do aluno.

A avaliação, na maioria das vezes, não é utilizada para estimular o estudante na busca e apropriação de novos conhecimentos, bem como para orientar e avaliar o progresso do aluno (VIANNA, 1998). Para tanto, pesquisadores como Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) e VIOLA DOS SANTOS (2007), trazem a análise da produção escrita como uma forma de buscar conhecer em detalhes a maneira com que os estudantes lidam com os enunciados das questões, como utilizam seus conhecimentos matemáticos prévios, ou seja, como utilizam sua matemática escolar para resolver as questões, como associam suas maneiras peculiares de lidar com a matemática acadêmica.

Neste sentido, esta pesquisa se faz diante da necessidade em buscar e compreender os motivadores das dificuldades encontradas pelos estudantes no estudo do Cálculo.

## 1.2 Uma experiência

De certa forma, identifico-me[1] com as palavras de Rezende (2003), pois cursei Cálculo duas vezes, a primeira no curso de Licenciatura em Matemática, a segunda no curso de Engenharia Civil, ambos da Unioeste. Pude vivenciar duas metodologias no ensino de cálculo, me sentia na angústia de querer ir além das aplicações de técnicas para calcular limite, derivada e integral – para que serve tudo isso? Na segunda vez, no entanto, pude compreender os conceitos abordados no Cálculo, a maneira com que todos os conteúdos foram trabalhados mudou minha concepção acerca do que é o Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, nesta segunda vez, para a avaliação da aprendizagem foram utilizadas tarefas de análise da produção escrita, sendo que cada aluno era considerado como único, as tarefas eram elaboradas de acordo com o que os alunos mostravam saber nas resoluções das provas, a fim de intermediar direto nas dificuldades dos estudantes. As diferenças entre os dois anos que cursei foram a metodologia utilizada para ensinar Cálculo, o que eu trazia da matemática da Educação Básica e a forma de ser avaliado, ou seja, os instrumentos de avaliação, apesar de ser prova escrita tínhamos um grande retorno de nossas provas, não apenas uma nota, cada prova era olhada como única e um conjunto de tarefa era elaborado para cada estudante, visando a compreensão dos conceitos.

Quando ingressei no curso de graduação, logo percebi que o que havia aprendido anteriormente não estava em consonância com o que eu estava aprendendo no nível superior, ou seja, a matemática escolar não estava ligada com a matemática acadêmica. Na segunda vez, já levava comigo conhecimentos adquiridos durante um ano em outras disciplinas do curso de Matemática, que foram fundamentais para aprender, de fato, o Cálculo Diferencial e Integral.

No ano que cursei Cálculo pela segunda vez, estava participando do Projeto de Iniciação

[1]Neste momento, utilizaremos a primeira pessoa do singular para transcrever a trajetória do autor no Cálculo Diferencial e Integral I.

Cientifica (PIBIC), cujo projeto era sobre Avaliação da Aprendizagem e sua vertente Análise da Produção Escrita, a qual, resumidamente, analisávamos produções escritas dos estudantes na primeira prova de Cálculo. Com isso, surgiu a vontade de entender cada vez mais o que ocasionava tantas reprovações no Cálculo Diferencial e Integral I. Pouco tempo depois, comecei a participar de um Grupo de Pesquisa, que também pautava-se na Avaliação da Aprendizagem, neste Grupo tivemos muitas discussões acerca do Ensino de Cálculo e Análise da Produção Escrita, bem como a produção de trabalhos envolvendo tais assuntos. Por estes motivos, me propus a dar continuidade a esta pesquisa, que iniciou com a Iniciação Científica e agora parte para a pesquisa de Monografia, a qual esperamos compreender o impacto da matemática escolar na matemática acadêmica no Cálculo Diferencial e Integral.

## 1.3 Objetivos

Esta análise visa ir além da identificação da forma correta ou errada, mas está atrelada à ideia de avaliação como prática de investigação. Além disso, a observação de aspectos essenciais e específicos para cada situação, como os caminhos escolhidos pelos estudantes para a resolução, quais os conhecimentos matemáticos foram utilizados e de que maneira utilizam as informações contidas no enunciado, dentre outras. Esteban (2000, p.11) coloca que a avaliação, enquanto prática de investigação

> se configura pelo reconhecimento dos múltiplos saberes, lógicas e valores que permeiam a tessitura do conhecimento. Nesse sentido, a avaliação vai sendo constituída como um processo que indaga os resultados apresentados, os trajetos percorridos, os percursos previstos, as relações estabelecidas entre as pessoas, saberes, informações, fatos, contexto.

O propósito é ampliar a compreensão da forma de pensar e de associar os conhecimentos de cada estudante. Isso se mostra valioso para que o professor possa estabelecer diálogos legítimos em torno e sobre o conhecimento matemático e sua utilidade e aplicação.

### 1.3.1 Objetivo geral

Identificar a maneira que um grupo de estudantes integrantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, em um curso de Engenharia, lidam com a matemática escolar na resolução de questões envolvendo o conceito de Limite

### 1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos do trabalho foram:

- Descrever as produções escritas na resolução de questões envolvendo o conceito de limite;
- Analisar as descrições e identificar as estratégias utilizadas nas resoluções e agrupá-las a fim de efetivar a análise destas produções, horizontalmente;
- Identificar as maneiras de lidar dos estudantes com a matemática escolar ao resolver uma prova envolvendo o conceito de Limite;
- Identificar relações entre a matemática escolar identificada nas produções e a matemática acadêmica;
- Identificar a maneira expressa nestas produções a respeito do conceito de aspectos do conceito de Limite;
- Identificar o que os estudantes mostram saber de matemática;
- Elencar a maneira de lidar com a Matemática, emergente destas produções escritas.

## 1.4 Procedimentos metodológicos

O nicho de nossa pesquisa é a primeira prova escrita de Cálculo Diferencial e Integral I dos estudantes do curso de Engenharia Agrícola da Unioeste no ano de 2015. Para compor a teoria utilizada na monografia realizamos uma busca nos periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). No campo de pesquisa avançada cruzamos os termos "análise da produção escrita" e "cálculo" a fim de obter pesquisas que abordem a Análise da Produção Escrita e o Cálculo Diferencial e Integral, com essa busca encontramos sete trabalhos, dos quais apenas um não utilizamos, pois o assunto não se enquadrou com o que estávamos buscando, então, estes trabalhos utilizamos para a revisão literária. Além disso, em se tratando do Ensino de Cálculo, realizamos buscas complementares nos periódicos da CAPES a fim de obter trabalhos que abordem este assunto, ou seja, cruzamos “ensino de cálculo” com “limite”, utilizamos também livros e artigos que não estavam listados nos periódicos da CAPES.

Os dados da disciplina de Cálculo apresentados na introdução foram obtidos através do Sistema de Gestão Acadêmica da Unioeste, o Academus, os quais foram buscados, repassados[2] e autorizados pela Coordenação Acadêmica, setor responsável pelo registro e controle das atividades da administração acadêmica.

A pesquisa é qualitativa, de cunho interpretativo, à luz de orientações presentes na análise de conteúdo Bardin (2016), conforme as diferentes fases de análise de conteúdo, organizadas em três polos: pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A pré-análise é a fase da organização, correspondendo, primordialmente, a um período de intuições, cujo objetivo é sistematizar as ideias iniciais. Esta primeira fase pode possuir três missões: a escolha dos documentos, a formulação de hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final (BARDIN, 2016). Uma das atividades que fazem parte desta primeira fase é a leitura flutuante, que

> [...] consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações. Esta fase é chamada de leitura “flutuante”, por analogia com a atitude psicanalista. Pouco a pouco, a leitura vai se tornando mais precisa, em função de hipóteses emergentes, da projeção de teorias adaptadas sobre o material e da possível aplicação de técnicas utilizadas sobre materiais análogos (BARDIN, 2016, p.126).

A exploração do material é a aplicação sistemática das tomadas de decisões, baseadas nas diferentes operações da pré-análise. Essencialmente, esta fase define as operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras formuladas previamente (BARDIN, 2016).

O tratamento dos resultados obtidos a interpretação, de acordo com Bardin (2016), é a fase na qual os resultados são tratados de modo a serem significativos e válidos, permitindo a elaboração de quadros de resultados, figuras e modelos, condensando as informações fornecidas pela análise.

[2] A solicitaçao dos dados encontra-se no Apêndice B.

> O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas (BARDIN, 2016, p.131).

Nesta pesquisa, a primeira leitura realizada foi a flutuante a fim sistematizar as ideias iniciais e os caminhos a serem tomados nas próximas leituras, ou seja, a pré-análise. Neste sentido, foi estabelecido a leitura horizontal, "quando olhamos a primeira questão de todos os alunos, depois a segunda e a terceira, analisando os pontos em comum e as regularidades presentes na produção escrita desse grupo de alunos" (NAGY-SILVA, 2005, p.113). Considerando este olhar, realizamos a leitura horizontal na qual foi possível identificar as estratégias e procedimentos de cada aluno em uma determinada questão, além de realizar inferências. Além da leitura horizontal, nos pautamos na leitura vertical, "quando relacionamos a produção de cada um dos alunos nas três questões de sua prova, considerando as características, as dificuldades apresentadas" (NAGY-SILVA, 2005, p.113). Em outras palavras, comparar a questão da análise inicial com as outras questões da prova do aluno, procurando evidências de dificuldades comuns apresentadas. Trabalhamos concomitantemente com a leitura horizontal e vertical, em primeiro momento realizando a análise de um item da prova, posteriormente agrupar e categorizar as produções a partir da leitura vertical, procurando padrões nas maneiras de lidar dos estudantes com conceitos matemáticos.

Foi considerado inicialmente um item de uma questão da primeira prova escrita dos estudantes de Engenharia. A escolha deste item se deu a parti da leitura flutuante, observando a questão que os alunos mais responderam. Fizemos uma resolução detalhada do item, apontando cada estratégia e procedimento que poderia ser utilizado, do nosso ponto de vista, imaginando a resolução de uma estudante.

Segundo Hadji (1994, p.47) "pode entender-se por estratégia a orientação geral das operações e dos meios a utilizar", e o procedimento "diz respeito ao processo de desenvolvimento da estratégia, o modo pelo qual se desenvolve a estratégia" (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p.77). Por exemplo, um problema que pode ser resolvido utilizando uma equação do segundo grau (estratégia), onde é necessário obter as raízes a partir da fórmula resolutiva de equação do segundo grau (Bháskara) ou soma e produto (procedimento).

O coordenador do curso e a docente da disciplina autorizaram análise da produção escrita das provas. Para a pesquisa, não foram utilizadas as provas originais, estas foram escaneadas e a fim de preservar a identidade, foram tampados os nomes das provas com uma fita de papel branca e as provas foram identificadas como P1, P2, ..., totalizando 42 provas. Então iniciamos a descrição de cada resolução. Na descrição nos pautamos em não expressar juízo de valor, apenas nos preocupamos em identificar a maneira lógica da resolução. Além disso, realizamos inferências, a fim de compreender cada resolução, a qual destacamos considerações que foram feitas diante da produção escrita de cada estudante. Com isso, realizamos as análises das produções escritas dos estudantes, e descrevendo cada uma delas compomos um quadro com estas informações.

Em uma próxima etapa, agrupamos e categorizamos as descrições das resoluções dos estudantes, bem como discutimos os resultados sobre o que os estudantes mostram saber deste conteúdo, resgatando resoluções de outas questões da prova, não somente do item em análise, visando compreender a maneira que lidam com conceitos matemáticos da matemática escolar e da matemática acadêmica.

# Capítulo 2

# Avaliação, Análise da Produção Escrita e Ensino de Cálculo

A prova é um momento no qual o estudante pode expressar seu conhecimento acerca do assunto a ser avaliado, a pressão, o tempo e a dificuldade são fatores que afetam seu desempenho, deixando, muitas vezes, aquela impressão de "dar branco". Na maioria das vezes, o estudante é avaliado a partir daquilo que ele deixou de fazer em uma prova, cujo interesse principal é a nota, ou seja, apenas algo quantificável. No entanto, o que o aluno mostra saber diante de uma questão, através de sua resolução, e a maneira com que utiliza seus conhecimentos é mais valioso do que a dicotomia certo/errado.

A maioria das escolas tem um sistema de avaliação visando o rendimento escolar[3] , um exemplo deste sistema é o IDEB que funciona como

> [...] um indicador nacional que possibilita o monitoramento da qualidade da Educação pela população por meio de dados concretos, com o qual a sociedade pode se mobilizar em busca de melhorias. Para tanto, o IDEB é calculado a partir de dois componentes: a taxa de rendimento escolar (aprovação) e as médias de desempenho nos exames aplicados pelo Inep. Os índices de aprovação são obtidos a partir do Censo Escolar, realizado anualmente (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2007).

Este índice varia de 0 a 10, o resultado do IDEB de 2019 do ensino médio, das escolas públicas estaduais foi de 3,9, cuja meta era de 4,9 e para 2021 a meta é de 4,9 (IDEB, 2020).

Esta política se preocupa em atuar na defasagem através de melhorias no ensino, projetos que estimulem a aprendizagem, no entanto, a real oportunidade de melhoria da aprendizagem

[3]Entendemos por rendimento escolar, segundo Buriasco (2000, p.157), como "avaliação do produto final, que, de certa forma, evidencia um resultado sem muita chance de ser modificado".

está ligada com a maneira que a Prova Brasil é utilizada, ou seja, o que o estudante responde nesta prova pode ser subsídio da metodologia com que os assuntos são abordados em salas de aula e como são avaliados. Luckesi (1996 apud BURIASCO, 2000, p.160) considera que

> [...] a avaliação precisa ser vista como um dos fios condutores da busca do conhecimento, de modo a dar pistas ao professor sobre qual o caminho já percorrido, onde o aluno se encontra, que práticas ou decisões devem ser revistas ou mantidas para que juntos, possam chegar à construção do resultado satisfatório.

Esta não é a realidade da maioria das escolas, onde a avaliação é utilizada apenas como um conjunto de provas, no qual, ao final do período letivo é realizado a média aritmética entre elas e distingue os alunos entre aprovados e reprovados, aqueles que vão ter que estudar tudo de novo e da mesma maneira, não garantindo que o estudante realmente irá aprender. Esteban (2000, p.1) coloca que as escolas "continuam profundamente marcadas pela ótica da homogeneidade, fazendo coincidir avaliar e julgar", focando em estabelecer parâmetros que permitem avaliar a qualidade da dinâmica pedagógicas, a partir da hierarquização dos estudantes pela sua nota.

Buriasco (2000) coloca que a avaliação educacional vem exercendo um papel de seleção, sobretudo no ensino da Matemática. A autora diz ainda que a avaliação

> [...] tem servido para selecionar, classificar, rotular, controlar e, através dela, o professor decide, muitas vezes, a trajetória escolar do aluno. Na maioria das vezes, os alunos são estimulados a se dedicarem a uma memorização desarticulada e que, por sua falta de sentido, tende a desaparecer logo após as sessões de avaliação do rendimento escolar (BURIASCO, 2000, p.157-158).

Percebe-se que o problema mencionado acima persiste até os dias atuais, ou seja, a avaliação sendo utilizada apenas como uma etapa final do ensino, e seus instrumentos não sendo utilizados como incentivos que permeiam pelo processo da aprendizagem. Segundo Buriasco (2000) para avaliar é necessário ter explícito os objetivos que deseja alcançar, estabelecer os instrumentos e quais os caminhos para utilizá-los, desta forma, a avaliação visa construir resultados que estão previamente definidos.

No Brasil,Vianna (1998) é um dos pioneiros a abordar aspectos da avaliação escolar. O autor defende a ideia de que instrumentos de medida, bem elaborados, podem estimular o estudante na busca da aprendizagem e na apropriação de novos conhecimentos, sendo um desafio ao seu interesse e à sua curiosidade intelectual. Além de orientar e avaliar o progresso do estudante. Alega que não se pode apontar um formato de avaliação como problema, e que se pode perceber que a forma de se avaliar o aprendizado não está sendo atualizada na mesma velocidade em que a sociedade se modifica.

O GEPEMA[4] "tem buscado reconhecer as potencialidades de diferentes modelos de prova escrita na perspectiva da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem" (MENDES; BURIASCO, 2018, p.653), diante isso, a avaliação é posta como parte integrante os processos de ensino e aprendizagem de forma sistemática, contínua, gerando informações das quais o professor pode reorientar sua prática e para o estudante regular sua aprendizagem (MENDES; BURIASCO, 2018). Portanto, consideramos a avaliação como prática e investigação, que deve ser exercida ao longo de toda ação de formação, não apenas identificar se os estudantes adquiriram conhecimentos propostos nas aulas, ou seja, a avaliação deve orientar, aperfeiçoar a ação tanto do estudante quanto do professor (TREVISAN; BURIASCO, 2016).

Neste sentido, para Viola dos Santos (2007) a análise da produção escrita é uma das formas de buscar conhecer em detalhes a maneira com que os estudantes lidam com problemas matemáticos, as dificuldades encontradas, levando em consideração maneiras de lidar do aluno, diferentes da correta, e esta forma está atrelada a ideia de avaliação como prática de investigação. Nos trabalhos de Nagy-Silva (2005); Perego (2005); Perego (2006); Negrão de Lima (2006); Alves (2006) (apud VIOLA DOS SANTOS, 2007, p.21) a produção escrita é entendida como possibilidade de conhecer quais conteúdos os estudantes demonstram ter, seus "erros" e dificuldades, bem como compreender como utilizam seus conhecimentos matemáticos escolares.

Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) centralizam suas análises na observação de aspectos essenciais e específicos para cada situação, como por exemplo: os caminhos escolhidos pelos estudantes para a resolução, quais os conhecimentos matemáticos foram utilizados, erros e qual sua possível natureza, utilização de informação contidas no enunciado, entre outras. Segundo Borasi (1987) a avaliação é uma oportunidade de explorar o desenvolvimento da matemática no conhecimento do estudante, e seus erros utilizados como investigação, diagnóstico e remediação.

[4]Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação. (http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/)

Dessa forma o professor dará mais atenção a cada passo utilizado na resolução do problema proposto.

Nagy-Silva e Buriasco (2005) defendem que a análise da produção escrita não só serve para avaliar o processo ensino e aprendizagem, mas também para estimular a postura crítica dos alunos diante de suas estratégias de resolução, o que contribuirá no desenvolvimento do raciocínio, de uma postura investigativa diante dos mais diversos problemas, e desprendimento das “palavras-chave” de enunciados. Pode-se dizer que a análise da produção escrita está centrada na análise de conteúdo de Bardin (2016). Segundo o autor, a análise de conteúdo é

> [...] um conjunto de técnicas que permitem a exploração e análise das informações de uma pesquisa. É por meio da Análise de Conteúdo que é possível retirar informações contidas num texto, interpretá-las podendo assim relacioná-las ao contexto em que se deu determinada produção. Esta forma de análise leva o pesquisador, depois de muito estudo, a criar categorias, agrupando unidades de análise semelhantes, fazendo inferências sempre que necessário e possível (BARDIN, 2004 apud SILVA; PASSOS; SAVIOLI, 2015, p.109)

Atualmente pode-se perceber que não se deve criminalizar um “erro”, mas tratá-lo como um obstáculo no processo de construção do conhecimento, pois não existe um único caminho para se chegar ao objetivo final, tem o caminho curto e fácil e o caminho mais longo e cheio de dificuldades, o educador deve perceber qual caminho cada aluno está seguindo para que possa orientá-los de forma correta. Entretanto, segundo Garnica (2006) a maneira mais usual utilizada pelo professor em sala de aula é a “leitura pela falta”, ou seja,

> [...] o professor detectará o que falta ao aluno: falta aprender conteúdos anteriores, falta a ele exercitar-se mais, faltam a ele certos conceitos, falta aprender a operacionalizar certos conceitos ou encaminhar melhor certas operacionalizações, falta a ele ler mais cuidadosamente o problema, falta um lar estruturado etc. etc etc (GARNICA, 2006, p.4).

É neste sentido que Viola dos Santos (2007) emprega o termo *maneiras de lidar*, apresentando

> [...] uma mudança no foco dessa discussão, substituindo “erro”, que em muitos casos acreditamos estar ainda caracterizando os alunos pela falta, por maneiras de lidar, expressão que

> considerarmos mais adequada para os processos de resolução de uma questão, com a qual acreditamos estar caracterizando os alunos pelo que eles já têm num determinado momento (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p.23).

Então, é necessário um olhar mais abrangente em cada modo de lidar, suas particularidades e o que o estudante demonstra saber, como utiliza conhecimentos anteriores, sem caracterizá-los pela falta, ou seja, pelo "erro" cometido, mas sim pelas maneiras de lidar (VIOLA DOS SANTOS, 2007). Portanto, é imprescindível que o professor tenha um olhar de estratégia didática para as maneiras de lidar e como uma forma de raciocínio dos estudantes, ou seja, um ponto de vista didático e psicológico do que eles expressam saber em uma avaliação, independente do instrumento utilizado (SPINILLO et al., 2016).

A avaliação como prática de investigação, como mencionado anteriormente, deve permear no processo de ensino e aprendizagem, o que implica na avaliação e na metodologia estarem relacionadas harmonicamente. Em se tratando da matemática acadêmica, sobretudo no Cálculo Diferencial e Integral,

> [...] o professor precisa ter bastante clareza sobre as características do conhecimento desejado, de quais diferentes relações podem ser estabelecidas, a fim de possibilitar articulações, mais ou menos estáveis, até por aproximações sucessivas possibilitar a construção de significados importantes (BARUFI, 1999, p.38).

Trevisan e Mendes (2017) se depararam com a expressão "não faz sentido algum...", ao observar comentários feitos por um de seus alunos em redes sociais. Dando indícios que a maneira com que os Cálculo é algo totalmente abstrato para os alunos. Tendo em vista o índice de reprovações do Cálculo e a expressão, a maneira com que conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são abordados pelo modelo cauchyano, sem possibilidade de alteração desta sequência de conteúdos,

> [...] iniciamos o estudo do Cálculo pela noção de limite de uma função e, em seguida, destacamos que: a continuidade depende de um limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (o quociente incremental; a integral é um limite (das somas de Riemann) (REIS, 2001 apud TREVISAN; MENDES, 2017, p.354).

Diversas pesquisas, a tempo, buscam por novas sequências de conceitos e modificar completamente estruturas curriculares do Cálculo. Por exemplo,

> o polêmico livro Calculus Made Easy, publicado originalmente em 1910 com o pseudônimo F.R.S – Fellow of the Royal Society (reeditado em 1998 e assinado por Silvanus Philips Thompson e Martin Gardner (THOMPSON; GARDNER, 1998)), serviu-nos de base para pensar os conceitos fundamentais do Cálculo de forma intuitiva, com pouco formalismo e valorização de aplicações. O que mais "nos salta aos olhos" ao analisar essa obra é que a noção de limite sequer é apresentada no livro; em seu lugar, o autor trabalha com infinitesimais. A obtenção das derivadas de funções elementares se realiza a partir da comparação de acréscimos, e a integral é definida como extensão do processo de somar uma vasta quantidade de valores infinitamente pequenos (TREVISAN; MENDES, 2017, p.359).

Dado que o livro foi publicado em 1910, alternativas para se modificar a sequência didática, o interesse na área não é respaldado apenas em problemas atuais. Baldino et al. (1995, p.42) afirma que "o limite é ensinado como pré-requisito para introduzir o conceito de derivada, e isto leva o aluno a ter de aplicar este conceito para resolver problemas que ele ainda não tem, isto é, que para ele ainda não fazem sentido", coloca ainda que para os alunos falta muito o modelo intuitivo, do ponto de vista de produção de significados.

Estruturas curriculares diferentes do modelo cauchyano foram e estão sendo elaboradas por muitos pesquisadores como, por exemplo, Trevisan e Mendes (2017). Estes pesquisadores buscam investigar estruturas curriculares que permitam que conceitos, teoremas e propriedades sejam desenvolvidos e refinados concomitantemente e se propõem a descrever e justificar estruturas não usuais, por meio da organização estrutural em formato de *espiral*. Esta organização possibilita que o aluno seja capaz de aprender em qualquer momento do curso. junto a opção metodológica de trabalho com episódios de resolução de tarefas. Também, Machado (2012 apud TREVISAN; MENDES, 2017), se baseia na teoria de aprendizagem em espiral de Jerome S. Bruner, para o Cálculo.

> De uma maneira geral, vamos propor que os Limites devem ser "diluídos" durante o avanço do estudo das Derivadas e Integrais partindo de noções mais intuitivas e chegando, ao fim da

> disciplina, à concepção aceita desde o século XIX pela comunidade matemática. Assim, estaremos salientando que o entendimento das Derivadas e Integrais deve ser o principal objetivo de um curso de Cálculo A e que, por este motivo, é preciso priorizar o tratamento destes conceitos desde o início do curso sem, com isso, tirar a importância do entendimento dos resultados mais abstratos desta teoria da Matemática (MACHADO, 2012 apud TREVISAN; MENDES, 2017, p.360).

Estas pesquisas sobre o Ensino de Cálculo apresentam diferentes propostas para o seu ensino e aprendizagem, mas todas possuem algo em comum, que consideramos de extrema importância para sua aprendizagem, que é a ideia da exploração intuitiva e qualitativa dos conceitos, perspectiva com a qual concordamos.

Hans Freudenthal, em seu livro Revisiting Mathematics de 1991 Education, faz uma crítica à forma que a Matemática é abordada tradicionalmente, apontando que é ensinada como um conteúdo já pronto e acabado. Algo terminado, cabendo aos alunos receber as regras, definições e algoritmos, seguidos de exercícios especialmente escolhidos pelos professores para aplicarem as mesmas regras, definições e algoritmos imediatamente apresentados, reproduzindo resoluções semelhantes.

Esta visão crítica do autor se estende ao Cálculo Diferencial e Integral e, para esta disciplina em particular, defende uma abordagem diferente da tradicional, segundo a qual a ordem tradicional de apresentação deva ser invertida, não iniciando pela matemática formal, mas sim partir das aplicações para a generalização.

> Trata-se de uma abordagem (em princípio por representações gráficas) inicialmente meramente qualitativa e posteriormente refinada quantitativamente (se possível). Visa compreender e interpretar tais ideias como a inclinação de um gráfico e áreas cobertas pelo segmento de ordenadas em movimento, talvez até curvatura, em contextos em que o desenho da curva matematiza uma dada situação ou ocorrência na realidade primordial - dificilmente precisamos salientar as vastas oportunidades aqui para reinvenção. Na nossa exposição, o Cálculo é melhor discutido juntamente com os algoritmos (FREUDENTHAL, 1991, p.55 tradução nossa)

De fato, defende a ideia de exploração qualitativa do Cálculo Diferencial e Integral, não descrimina os algoritmos, mas defende que estes sejam obtidos por meio da algoritmização, apontando que não foi desenvolvida o suficiente para permitir o ensino de Cálculo. O que significa algoritmização no sentido de Freudenthal? Significa que o algoritmo não deve ser apresentado de antemão e muito menos com a sua demonstração, mas sim por meio de casos específicos, pontuais. Nesta linha, o estudante é chamado a resolver questões que vão adquirindo complexidade e generalidade, até alcançarem a generalidade de um algoritmo ou teorema.

Nesta perspectiva, trazer à tona a maneira que o estudante lida com seus conhecimentos, além da verificação do certo e do errado, pode fornecer elementos úteis ao professor para aprofundar ou redirecionar uma aprendizagem.

# Capítulo 3

# Análise e discussão

A Análise da Produção Escrita nos permite investigar minuciosamente o que ocorreu na resolução de questões, levando em consideração a maneira que o estudante lida com situações matemáticas, nas quais é necessário entrelaçar conhecimentos matemáticos. Com isso, buscamos uma compreensão para além do resultado certo ou errado, mas o raciocínio subjacente, o que de fato foi utilizado como condutor do raciocínio, quais conhecimentos embasaram a teia tecida pelo estudante em sua resolução.

Nesta pesquisa, o entrelaço que buscamos é a atuação da matemática escolar na matemática acadêmica, ou seja, o impacto que os saberes associados ao processo de educação escolar têm sobre os saberes que constituem um corpo científico de conhecimentos (DAVID; MOREIRA; TOMAZ, 2013).

O item principal de nossa análise trata especificamente da aplicação do limite em um valor dado. A seguir apresentamos o enunciado do primeiro item, seguido de uma resolução possível e correta, que serviu de parâmetro para descrever e ser utilizada como referência ao interpretar a produção escrita dos estudantes, visando a não repetição de argumentos.

Calcule o limite

a) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$

**Resolução:**[5] Primeiramente, espera-se que o estudante chegue à conclusão que não é válida a estratégia de substituir o valor de $x$ por 16, fazendo uso da propriedade que garante que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ se $f$ for contínua em $a$, uma vez que $\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$ é descontinua em $x = 16$ e se $f$ for

[5]Para justificar esta resolução, nos pautamos em propriedades e conceitos do Cálculo que podem ser encontradas em Stewart (2016).

aplicada em $x = 16$ se obtem uma indeterminação. No entanto, a função que se deseja calcular o limite em $x = 16$ possui uma descontinuidade removível. Assim, é possível, algebricamente, transformar $f(x)$ em uma função que diferente em apenas um ponto. Então, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador, temos

$$\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} = \lim_{x\to 16} \frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}.$$

Pela distributiva do denominador, segue que

$$\lim_{x\to 16} \frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \lim_{x\to 16} \frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot 4 - 4\cdot\sqrt{x} - 4\cdot 4} =$$
$$\lim_{x\to 16} \frac{(x-16)(\sqrt{x}+4)}{x-16}$$

Dividindo numerador e denominador por $x - 16$, obtemos

$$\lim_{x\to 16} \sqrt{x}+4$$

Calculando o limite quando $x \to 16$, temos

$$\lim_{x\to 16} \sqrt{x}+4 = \sqrt{16}+4 = 4+4 = 8$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} = 8.$$

Diante disso, sabemos que em primeiro momento há uma indeterminação, portanto, em nossa análise, objetivamos identificar a maneira que os estudantes lidam com esta situação, ou situações recorrentes de outras questões da prova, e a maneira que utilizam a matemática escolar nas manipulações algébricas.

Com as produções escritas, realizamos a primeira descrição, seguida da interpretação com inferências (Tabela 3.1)[6].

Ressalta-se que na discussão utilizamos outras questões da prova, que poderão ser verificadas no Apêndice A.

[6]Esta tabela está em formato de quadro, pois foi necessário realizar adequações nos códigos do editor LaTeX para comportar o Quadro de Análise.

Tabela 3.1: Quadro de Análise

| Prova | Descrição Objetiva | Interpretação e Inferências |
|---|---|---|
| P1 | Substitui o valor para o qual a variável tende, 16, na expressão algébrica da função, obtendo uma fração com numerador e denominador igual a zero. Apresenta a conclusão de que o limite não existe. | A estratégia utilizada foi aplicar o valor para o qual a variável, no caso $x$, tende, neste caso, tende a 16. A indeterminação obtida a partir da substituição direta $0/0$ funciona como um indicador da não existência do limite |
| P2 | Aplica $x = 16$ na função, obtendo uma fração com numerador e denominador como diferenças numéricas que resultam em $\frac{16-16}{\sqrt{16}-4} = 0$. Apresenta o resultado do limite igual a 0. | A estratégia utilizada foi aplicar o valor para o qual a variável, no caso $x$, tende, neste caso, tende a 16. O resultado desta substituição parece resultar em $0/0$. No entanto, esta fração é igualada a 0, que é o resultado do item. |
| P3 | Desenvolveu conforme a nossa resolução. | Consideramos que a estratégia foi de multiplicar pelo conjugado do denominador. |
| P4 | Aplica o ponto $x = 16$ na função, obtendo $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{0}{4-4} = \dfrac{0}{0}$. Conclui que o limite não existe. | Nota-se que o estudante utilizou a estratégia de aplicar diretamente o valor na função. Também, ao encontrar a indeterminação do tipo $0/0$, conclui que não existe o limite, tendo de maneira equivocada o conhecimento de indeterminação e existência do limite. Além disso, a partir do momento que se aplica o valor na função, não se pode utilizar o "$\lim$". |
| P5 | Multiplica apenas o denominador pelo conjugado do denominador da lei de formação obtendo $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to16} \dfrac{x-16}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \lim\limits_{x\to16} \dfrac{x-16}{2\sqrt{x^2-4\sqrt{x}}}$, neste momento risca 16 do numerador, resutando em $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{x}{2\sqrt{x^2-4\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to16} \dfrac{x}{2x-4\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to16} x - 4\sqrt{x}$ concluindo que $\lim\limits_{x\to16} = -4$ | O estudante demonstra compreender que a estratégia de aplicar o valor na função para este caso não funciona, entretanto, a estratégia de multiplicar o denominador pelo próprio conjugado não mantém a equivalência da fração, tornando a estratégia equivocada. Além disso, utiliza o limite de forma equivocada, uma vez que limite é calculado sobre uma função, neste caso. |
| P6 | Substitui $x-16$ do numerador por $(x-4)(x+4)$, ou seja, $\frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{x}-4}$, risca $x-4$ e $\sqrt{x}-4$, obtendo $16+4=20$. | Nota-se que o estudante tentou fatorar o numerador e depois realizou uma simplificação equivocada. |

Continua na próxima página

Tabela 3.1 – Continuação

| **Prova** | **Descrição Objetiva** | **Interpretação e Inferências** |
|---|---|---|
| P7 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$, obtendo $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{x\sqrt{x}+4x-16\sqrt{x}-64}{x+4\sqrt{x}-4\sqrt{x}-16} = \lim\limits_{x\to16}\dfrac{x\sqrt{x}+4x-16\sqrt{x}-64}{X-16}$. Porém, escreve $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{x^2+16x-16x-256}{x\sqrt{x}+16\sqrt{x}-4x-16} = \lim\limits_{x\to16}\dfrac{x^2-256}{x\sqrt{x}+16\sqrt{x}-4x-16}$, com isso substitui $x$ por 16 e obtém 0 como resultado. | Utiliza a estratégia de multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador. No entanto houve erro de procedimento ao manipular algebricamente o numerador, comparando $x\sqrt{x}+4x-16\sqrt{x}-64$ com $x^x+16x-16x-256$, entende-se que houve a tentativa de elevar ao quadrado para retirar as raízes. |
| P8 | Aplica $x = 16$ em $\frac{x-16}{\sqrt{x}-5}$, obtendo $\frac{16-16}{\sqrt{16}-4} = 4-4 = 0$. | O estudante utilizou como estratégia aplicar o $x = 16$ na função. Encontrando 0 como resultado, podemos observar que há um equívoco ao obter 0 em uma divisão cujo dividendo seja 0. |
| P9 | Escreve $\{x \in \mathbb{R} \| x \leqslant 16\}$ e calcula o limite aplicando $x = 15$ na função, ou seja $\frac{15-16}{\sqrt{15}-4} = \frac{-1}{11} = 11$, faz o mesmo com $x = 17$ e obtém 13. | Acredita-se que o estudante tenha tentado resolver este limite através de testes pelos limites laterais, entretanto não conclui o real valor do limite. |
| P10 | Escreve $\lim\limits_{x\to16}{}^2 = \dfrac{x^2+(-16)^2}{(\sqrt{x})^2+(-4)^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to16}{}^2 = \dfrac{x^2+256}{x+16} = x+16$, com isso põe uma flecha apontando para $\lim\limits_{x\to16} = \sqrt{x+16} = \sqrt{x}+4$, substitui $x$ por 16 e obtém 8 como resultado. | Nota-se que o estudante possa ter pensado em elevar ao quadrado o numerado e o denominador equivocadamente. Além disso, utiliza a raiz quadrada de forma incorreta, matematicamente. Utiliza corretamente o sinal de implicação. |
| P11 | Escreve $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{16}}{\sqrt{x}-\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$, obtendo $\frac{-4}{-2} = 2$. | A estratégia utilizada foi de colocar uma raiz quadrada na variável que não tinha e nos números. A eliminação dos termos $\sqrt{x}$ do numerador e denominador nos leva interpretar que houve um "corte"de $\sqrt{x}$, inferimeos há tentativa de realizar uma simplificação. |
| P12 | Não apresentou produção escrita. | Não há. |
| P13 | Não apresentou produção escrita. | Não há. |

Continua na próxima página

Tabela 3.1 – Continuação

| **Prova** | **Descrição Objetiva** | **Interpretação e Inferências** |
|---|---|---|
| P14 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$, obtendo $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x\sqrt{x}+4x-16\sqrt{x}-64}{X-16}$, com isso $\sqrt{16}+4\cdot 16-4\sqrt{x}-64$. Registrando, $4+64+4-64=4$. | Nota-se que o estudante utilizou a estratégia de multiplicar a função pela fração cujos membros é o conjugado de $\sqrt{x}-4$, no entanto realizou uma simplificação equivocada ao "cortar" $x$ do primeiro termo do numerador com $x$ do numerador e 16 do numerador com 16 de denominador. |
| P15 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-4}$, obtendo $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x\sqrt{x}+4x-16\sqrt{x}-64}{X-8\sqrt{x}+16}$. | É possível notar que o estudante tentou obter uma nova função, acredita-se que pensou em multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador, entretanto, percebe-se que multiplicou pelo próprio denominador. Além disso, tenta fatorar a expressão, mas de maneira equivocada. |
| P16 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$, obtendo $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x\sqrt{x}+4x-16\sqrt{x}-64}{X-16} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{16\sqrt{16}-4\cdot(16)-16\sqrt{16}-16}{(16)-4}$, escreve então $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{16\cdot 4+64-16\cdot 4-16}{-64} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{3}{4}$. | O estudante utilizou a estratégia de multiplicar o numerador e denominador pelo conjugado do denominador, no entanto, ao deixar o denominador igual a $x-16$ teria resultado zero ao aplicar 16 na função. |
| P17 | Escreve $20-16=\frac{4}{\sqrt{20-4}}=\frac{4}{\sqrt{16}}=\frac{4}{4}=1$. Além disso, aplica $x=16$, ou seja $\frac{16-16}{\sqrt{16-4}}=\frac{0}{4-4}=\frac{0}{0}$. | Acredita-se que o estudante tenha calculado, de forma equivocada, o limite lateral pela direita utilizando 20. Possui dificuldade ao operar com raiz, uma vez que realiza $\sqrt{20}-4=\sqrt{16}$. |
| P18 | Escreve $\frac{-4-16}{\sqrt{4}-4}=\frac{-20}{2-4}=\frac{-20}{-2}=-10$. A variável da lei da função foi substituída por 4, adicionando um sinal negativo à frente da lei. Operou corretamente com os valores substituídos, obtendo $-10$ como resultado do limite. | Parece que a estratégia utilizada foi substituir a variável da função pela raiz quadrada do número ao qual $x$ tende, adicionando um sinal negativo à frente da fração. Opera corretamente com os valores numéricos na fração. |
| P19 | Multiplica numerador e denominador da lei de formação por $\sqrt{x}+4$ e obtém $\frac{x\sqrt{x}-12}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$, riscou $\sqrt{x}$ do numerador e denominador e registra que $\frac{16-12}{\sqrt{16}=\frac{4}{4}=1}$. | Nota-se que utilizou como estratégia multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador. No entanto, realizou uma operação equivocada ao simplificar $\sqrt{x}$ em $\frac{x\sqrt{x}-12}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$. |
| | | Continua na próxima página |

Tabela 3.1 – Continuação

| Prova | Descrição Objetiva | Interpretação e Inferências |
|---|---|---|
| P20 | Substitui $x$ por 16, chegando a $\frac{0}{0}$, concluindo que é indeterminado. Além disso, escreve $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{(x-16)^2}{(\sqrt{x}-4)^2} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{(x+4)(x-4)}{x-4}$. Neste passo, risca o índice da raiz no denominador e a potência do denominador, bem como risca $x-4$ do numerador e denominador. | Pode-se perceber que o estudante compreende que o resultado imediato do limite é uma indeterminação. Então, utiliza a estratégia de elevar ambos os membros da fração ao quadrado. Mas, é possível observar erros de procedimentos ao simplificar o índice da raiz com a potência do denominador, o que neste caso não é possível realizar. |
| P21 | Desenvolveu conforme a nossa resolução. | Não há. |
| P22 | Escreve $\frac{16-16}{\sqrt{16-4}} = \frac{0}{\sqrt{12}}$. | Aplica 16 na função. É possível notar que o estudante pode ter interpretado equivocadamente o denominador da fração, ao escrever $\sqrt{16-4}$ pode ter entendido o denominador como sendo $\sqrt{x-4}$. |
| P23 | Registra $\dfrac{\lim\limits_{x\to 16} x-16}{\lim\limits_{x\to 16} \sqrt{x}-4}$ e $\frac{16-16}{\sqrt{14-4}} = \frac{0}{0}$, entõ escreve o símbolo de ”não existe”. | Percebe-se que o estudante utilizou a propriedade que o limite do quociente é o quociente dos limites. Conclui que o limite não existe a partir de $\frac{0}{0}$. |
| P24 | Escreve $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}(x-16)}{x-4}$. Então, registra $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}(16-16)}{16-4} = \dfrac{4\cdot 0}{12} - \dfrac{0}{12}$, concluindo que $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \dfrac{0}{12}$. | Nota-se que multiplicou numerador de denominador por $\sqrt{x}$, mas ao multiplicar $\sqrt{x}-4$ por $\sqrt{x}$, percebe-se que utilizou equivocadamente a propriedade de distributividade, uma vez que ao multiplicar $-4$ por $\sqrt{x}$ obtém $-4$. |
| P25 | Multiplica $\frac{x-16}{\sqrt{x-4}}$ por $\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}$ obtendo $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16\cdot\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}^2} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16\cdot\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}$, então circula $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{2\sqrt{3}}{12}$. | Percebe-se que entende o denominador como $\sqrt{x-4}$ e, por isso, ao multiplicar ambos os membros da fração por $\sqrt{x-4}$, obtém denominador $\sqrt{x-4}^2$. |
| P26 | Desenvolveu conforme a nossa resolução. | Não há. |

Continua na próxima página

Tabela 3.1 – Continuação

| Prova | Descrição Objetiva | Interpretação e Inferências |
|---|---|---|
| P27 | Registra $\frac{x-16}{x^2-4}$ e $\frac{x-16}{2x-4}$, além disso, escreve $x \neq 16$. | Ao escrever $x \neq 16$, acredita-se que o estudante reconhece que a função não é contínua neste ponto, ou de que ao aplicar este ponto irá chegar em uma indeterminação. Além disso, aparentemente, para este estudante $x^2 = 2x$. |
| P28 | Calcula $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$ em $x = 16$, obtendo 0 como resultado. Então, volta ao limite inicial e multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$, resultando em $\frac{x\sqrt{x}-4x-16\sqrt{x}-64}{x-16}$, encerrando a resolução neste passo. | Percebe-se que esqueceu de utilizar a raiz no denominador ao aplicar $x = 16$ na função. Além disso, utiliza a estratégia de multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador, no entanto não termina o procedimento. |
| P29 | Escreve $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{16-16}{\sqrt{16}-4} = \dfrac{0}{4-4} = \dfrac{0}{0} = 0$. | O estudante aplica 16 no limite, obtendo 0 a partir de $\frac{0}{0}$. Diante disso, percebe-se que uma divisão por zero é possível para o estudante. |
| P30 | Desenvolveu conforme a nossa resolução. | Não há. |
| P31 | Multiplica numerador e denominador da lei de formação por $\sqrt{x+4}$ chegando em $\frac{x-16\cdot(\sqrt{x+4})}{\sqrt{x^2+4x+16}^2}$, riscou o expoente 2 com o índice da raiz e obteve $\frac{x-16\cdot(\sqrt{x+4})}{x^2-16}$. | Nota-se que o estudante possa ter pensado em multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador. No entanto, utilizou o numerador como sendo $\sqrt{x-4}$. Além disso, simplificou equivocadamente o expoente 2 do $x$ com o índice da raiz. |
| P32 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-4}$ e iguala a $\frac{x+64}{x+16}$, então aplica $x = 16$ e obtém $\frac{80}{32}$ concluindo que $\frac{5}{2} = 2,5$. | Nota-se que o estudante teve a intensão de obter uma nova função que seja contínua em 16, multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{x} - 4$. Além disso, houve erro de procedimento o realizar a distributiva em $(x-16)(\sqrt{x}-4)$, tendo em vista que obteve $x + 64$ e o correto é $x\sqrt{x} - 4c - 16\sqrt{x} + 64$. |

Continua na próxima página

Tabela 3.1 – Continuação

| Prova | Descrição Objetiva | Interpretação e Inferências |
|---|---|---|
| P33 | Multiplica a lei de formação por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$, riscando $\sqrt{x}+4$ do numerador e $\sqrt{x}-4$ do denominador, obtendo $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}+4}$ igualando a $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\quad}{\sqrt{16}+4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\quad}{4+4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\quad}{8}$. Não apresentou valor para o numerador. | Nota-se que utilizou como estratégia multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador. No entanto, houve erro de procedimento ao simplificar $\sqrt{x}+4$ com $\sqrt{x}-4$. |
| P34 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-4}$ obtendo $\frac{x\sqrt{x}+64}{x-16}$, riscou $x$ do numerador e denominador chegando em $\frac{\sqrt{x}+64}{16} = \sqrt{x}+4$, neste momento aplica $x = 16$ e obtém 8 como resultado. Em outro local de sua prova multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$ chegando em $\sqrt{x}-4=0$, escrevendo que o limite não existe. | Percebe-se que utilizou duas estratégias para resolver. A primeira foi multiplicar numerador e denominador por $\sqrt{x}-4$ e a segunda foi multiplicar por $\sqrt{x}+4$. Na primeira estratégia os erros de procedimentos foram de realizar equivocadamente a distributividade de $\sqrt{x}-4$ com $x-16$ e simplificar $x$ de $x\sqrt{x}$ com $x$ do denominador. E na segunda estratégia, também, foi realizada equivocadamente a distributividade. |
| P35 | Aplica $x = 16$ na lei de formação da função e obtém $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4-16}{\sqrt{4}-4} = \dfrac{-12}{-2} = 6$. | Não há. |
| P36 | Desenvolveu conforme a nossa resolução. | Não há. |
| P37 | Registra $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x-16}}{\sqrt{\sqrt{x-4}}} = \dfrac{\sqrt{x-16}}{x-4} = \dfrac{\sqrt{0}}{12}$. | Inicialmente, acredita-se que interpretou de modo equivocado o denominador ao utilizá-lo como sendo $\sqrt{x-4}$, além disso, extrai a raiz de ambos os membros da fração, simplificando o índice das duas raízes do denominador, o que é equivocado. |
| P38 | Aplica $x = 16$ na função e obtém $\frac{16-16}{\sqrt{16}-4} = \frac{0}{0}$. | Percebe-se que o estudante chegou na indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, entretanto não apresenta estratégia para resolvê-la. |

Continua na próxima página

Tabela 3.1 – Continuação

| **Prova** | **Descrição Objetiva** | **Interpretação e Inferências** |
|---|---|---|
| P39 | Calcula o limite quando $x$ tende a 16 pela direita, obtendo $\lim\limits_{x \to 16^+} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = +\infty$ e pela esquerda registra $\lim\limits_{x \to 16^-} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = -\infty$. Conclui que o limite não existe. | Percebe-se que pode ter se baseado no teorema que garante que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe se os limites laterais existirem e forem iguais. No entanto, obteve os limites laterais de maneira equivocada. Mostra saber sobre a existência de limite. |
| P40 | Multiplica a função por $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$ resultando em $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{-16x\sqrt{x}+4x-64}{x-16}$, encerrando neste passo. | Utiliza a estratégia de multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador. Realiza as distributividades, mas não continua a resolução. Acredita-se que não deu continuidade por não conseguir simplificar a expressão. |
| P41 | Desenvolveu conforme a nossa resolução. | Não há. |
| P42 | Aplica $x = 16$ na lei de formação obtendo $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{16-16}{\sqrt{16}-4} = \dfrac{0}{0} = 0$, concluindo que o limite não existe. | Nota-se que o conceito de existência de limite está sendo utilizado de maneira equivocada. Além disso, percebe-se que para o estudante é possível realizar uma divisão por zero, talvez isso tenha ocorrido por ter como base que dividir zero por qualquer valor, o resultado é zero, mas neste caso, é necessário exclui o zero como um divisor. |

Analisando a Tabela 3.1 e a fim de organizar as provas por grupos, os seguintes agrupamentos foram identificados.

- Estratégias Corretas e Procedimentos Corretos;
- Não calcula o limite da função na forma algébrica;
- Estratégia: calcular o limite da função em x=16 e Procedimento: concluir que o limite não existe a partir de $\frac{0}{0}$;
- Utilização dos limites laterais para calcular o limite de uma função na forma algébrica;
- Divisão de 0 por $x$ obtém resultado $x$;
- Compreendem conceitos do Cálculo e demonstram um obstáculo na matemática escolar.

Além disso, houve a formação de categorias:

- Obstáculo na Matemática Escolar;
- Problemas conceituais: existência e limites laterais;
- Totalmente correto.

Observando a Tabela 3.1 acima, é possível notar que as resoluções das provas P3, P21, P26, P30, P36 e P41 utilizaram a estratégia de multiplicar a fração algébrica pelo conjugado do denominador desta mesma fração, a fim de obter uma nova função que seja contínua em $x = 16$. Além disso, os procedimentos seguem os critérios e propriedades matemáticas que levam ao resultado correto do cálculo deste limite. Portanto, essas resoluções foram agrupadas por: estratégia correta e procedimentos corretos e categorizadas por: totalmente correto.

Nas provas P12 e P13, os exercícios que tratam do cálculo de limite de uma função estão sem resolução. No entanto, na P12 foi possível identificar que o estudante sabe encontrar o limite de uma função através de seu gráfico, conforme a Figura 3.1.

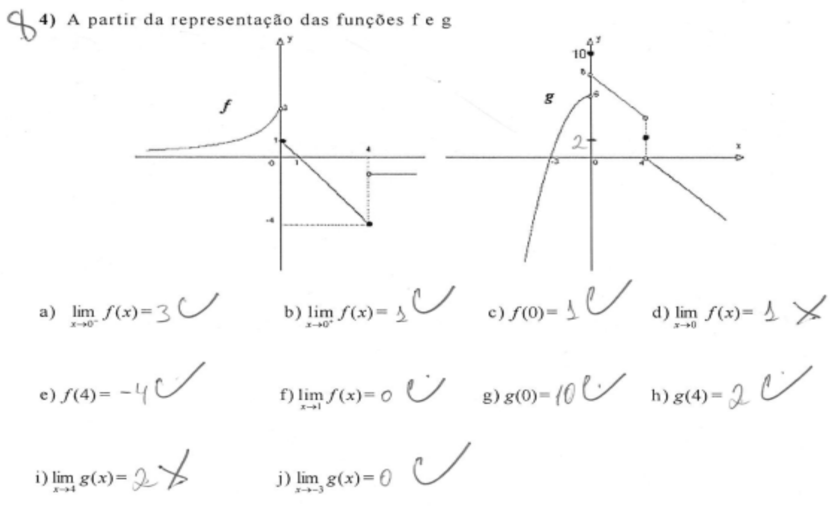



Figura 3.1: Produção escrita P12
Fonte: Acervo do autor

Notemos que nestes casos, os estudantes compreendem o limite de uma função em determinado ponto quando esta função está em sua forma gráfica, mas no que diz respeito a forma algébrica não há registros de tentativas de resoluções. Portanto, estas provas foram agrupadas por: não calcula o limite de uma função na forma algébrica e categorizadas por: obstáculo na Matemática Escolar.

Nas resoluções das provas P1, P4, P23, P29 e P42, os estudantes calculam o limite em $x = 16$ e, diante das manipulações algébricas, obtém $\frac{0}{0}$, concluindo que o limite não existe. Uma vez que o estudante conclui que o limite não existe a partir de $\frac{0}{0}$, podemos dizer que há um conflito entre o que ele entende por indeterminação e o que ele entende por existência de limites. Estes discentes podem ter relacionado a não existência do limite às propriedades de divisibilidade dos números reais, na escola normalmente apenas se fala que "não existe divisão por zero", portanto, para estes estudantes a indeterminação garante a inexistência do limite. Em outros exercícios da P3, identificamos que o estudante conclui que o limite não existe ao chegar em $\frac{0}{0}$, conforme mostram as Figuras 3.2 e 3.3.

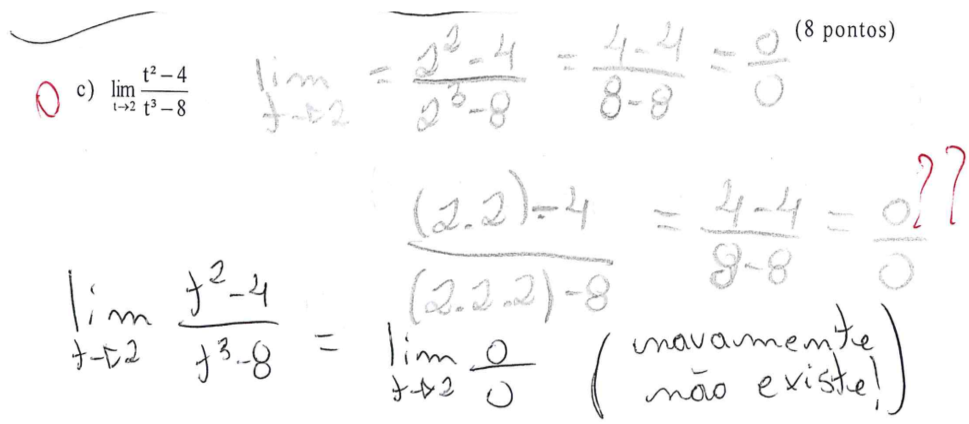



Figura 3.2: Produção escrita P3-c
Fonte: Acervo do autor

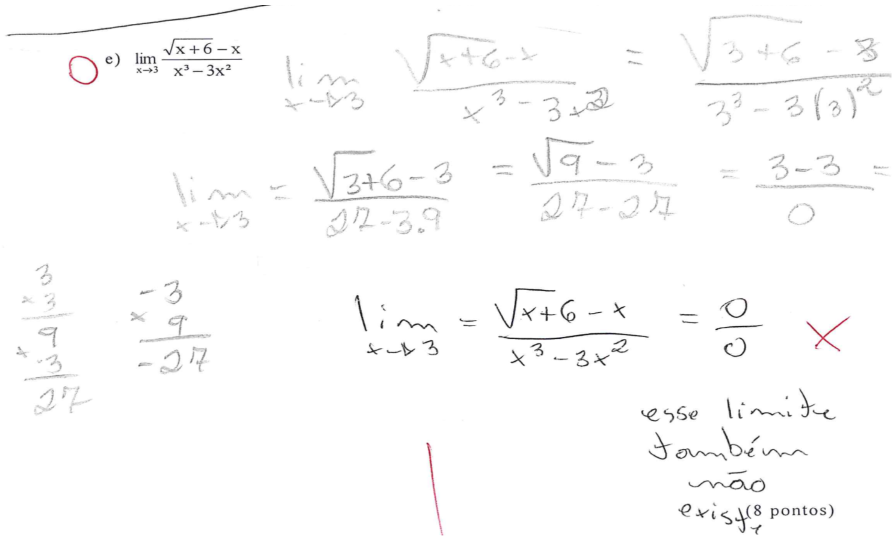



Figura 3.3: Produção escrita P3-e
Fonte: Acervo do autor

Foi identificado também, na P4, casos em que o estudante mostra saber que $\frac{0}{0}$ garante a inexistência do limite, conforme as Figuras 3.4, 3.5 e 3.6.

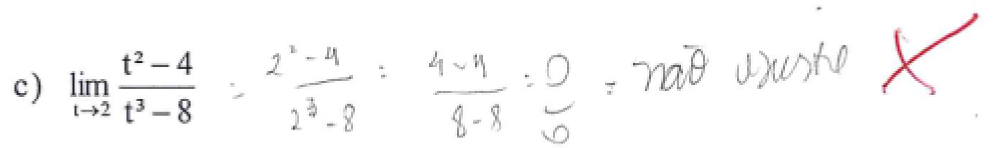



Figura 3.4: Produção escrita P4-c
Fonte: Acervo do autor


Figura 3.5: Produção escrita P4-d
Fonte: Acervo do autor

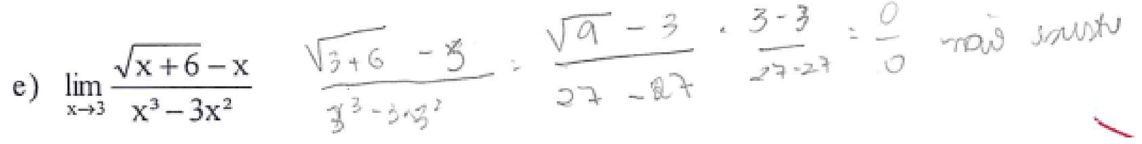



Figura 3.6: Produção escrita P4-e
Fonte: Acervo do autor

Já na P23, no exercício 4, onde o estudante deveria obter os limites através de representações gráficas de duas funções, é possível observar (Figura 3.7) que ao resolver o item "d" e "i" registrou que o limite não existe, pois os limites laterais são diferentes, que, de fato, é um dos critérios para a existência do limite de uma função em um determinado valor.

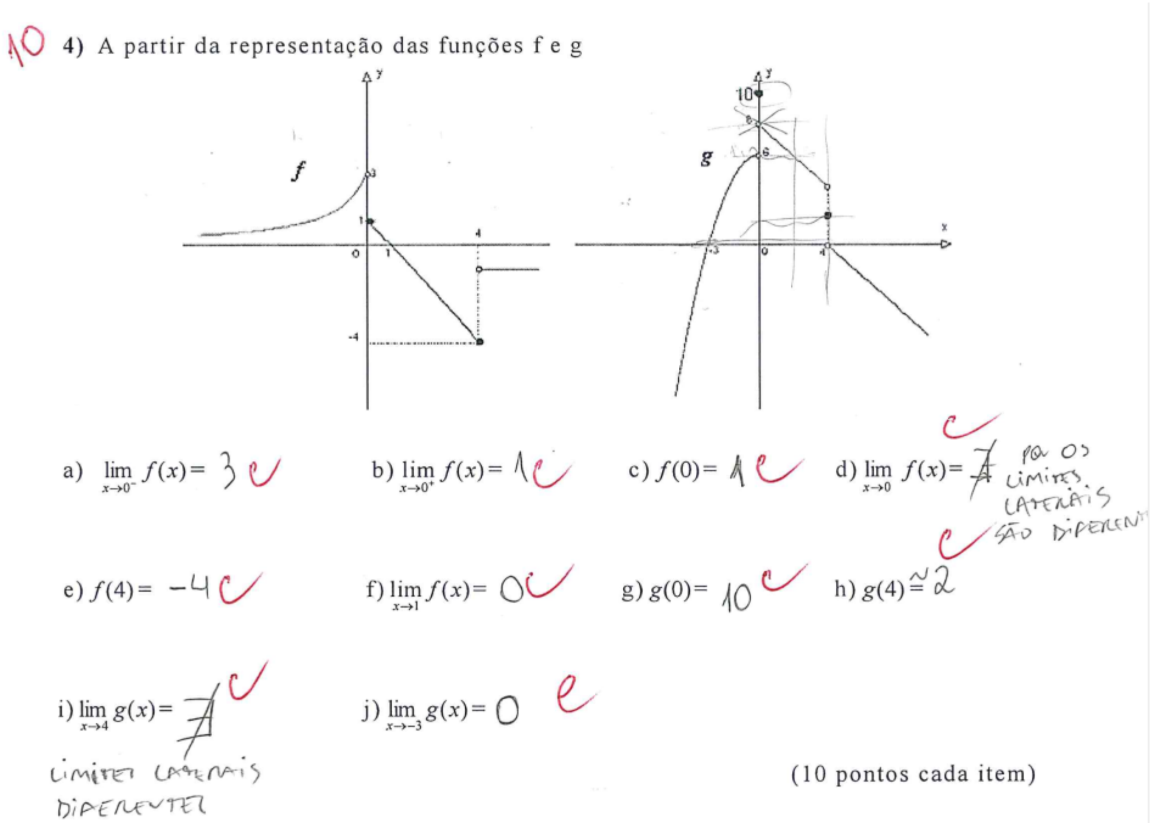



Figura 3.7: Produção escrita P23-gráfico
Fonte: Acervo do autor

Já no item "c" do exercício 6, resolveu da seguinte maneira (Figura 3.8).

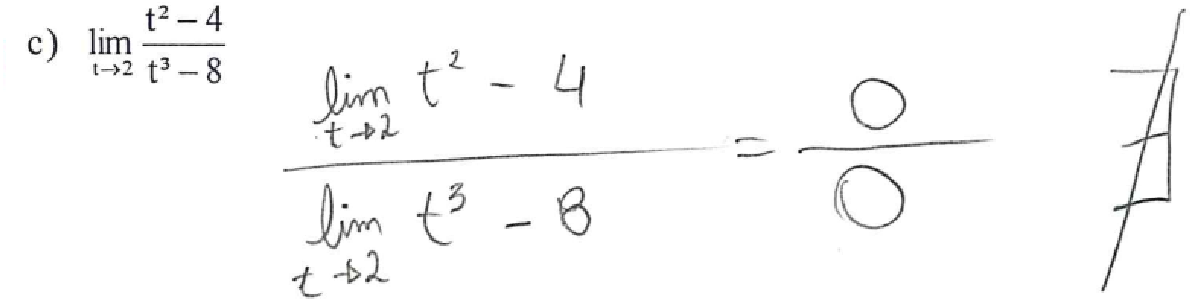



Figura 3.8: Produção escrita P23
Fonte: Acervo do autor

Diante de uma indeterminação, este estudante conclui que o limite não existe e a partir dos limites laterais, em outro caso, conclui que não existe. Com isso, é possível inferir que graficamente ele consegue identificar a existência do limite de uma função, mas algebricamente não consegue. Logo, o discente lida com o conceito de existência de forma diferente em situações diferentes, o que não é algo que impeça seu aprendizado, mas a forma com que as duas situações não se entrelaçam para chegar a um mesmo fim dificultam a aprendizagem. Neste sentido, estas resoluções foram agrupadas por: Estratégia: aplicar o ponto no limite e Procedimento: concluir que o limite não existe a partir de $\frac{0}{0}$ e categorizadas por: problemas conceituais: existência e limites laterais.

As resoluções das provas P9 e P39 apresentam uma possível tentativa de utilizar os limites laterais para resolver, uma vez que para existir o limite de uma função valor $x$ dado, os seus limites laterais devem existir e serem iguais e a função deve ser contínua em x. Na P39, o estudante calcula o limite através do gráfico da função (Figura 3.9).

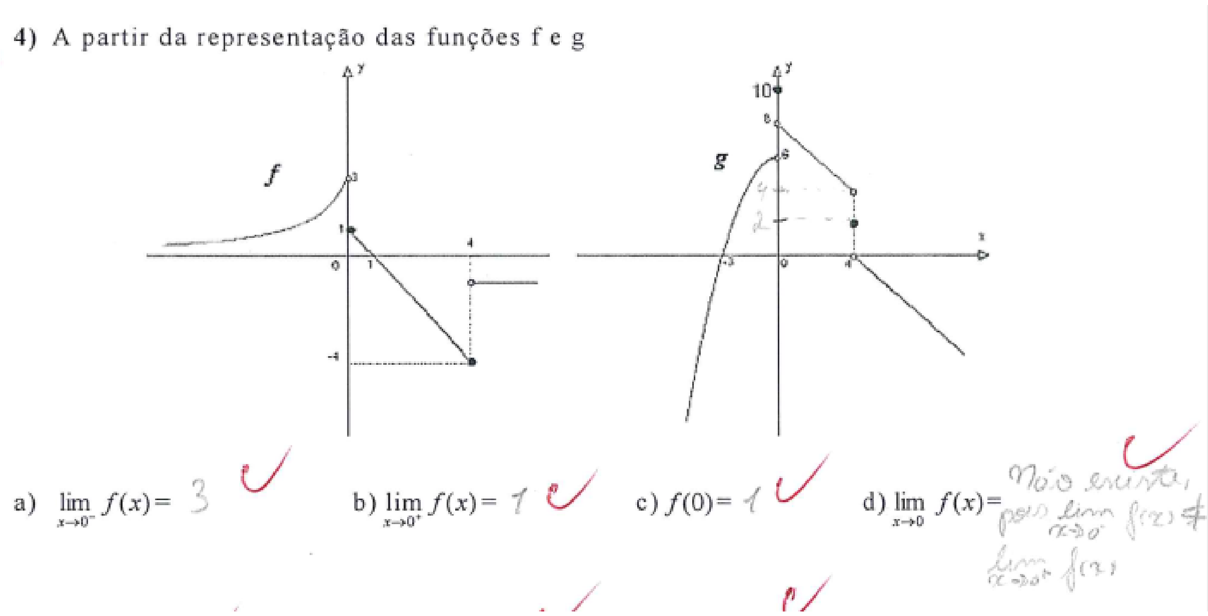



Figura 3.9: Produção escrita P39-gráfico
Fonte: Acervo do autor

Nota-se que conclui que o limite não existe, pois os limites laterais são diferentes. Nesta mesma prova, o item "d" do exercício 6, exige o cálculo do limite de uma função da forma algébrica, o estudante registrou (Figura 3.10).

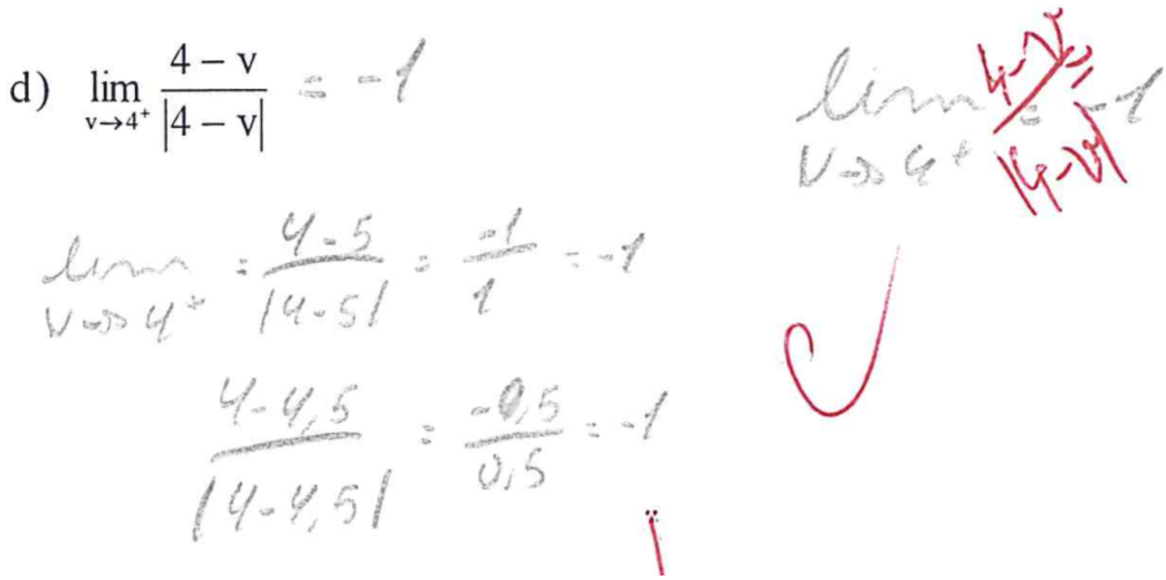



Figura 3.10: Produção escrita P39
Fonte: Acervo do autor

Neste caso, calcula o limite utilizando aproximações do 4 pela direta, como nos dois casos que calculou obteve resultado $-1$, então conclui que o limite da função quando v tende a 4 pela direta é $-1$. Estas provas, foram agrupadas por: utilização dos limites laterais para calcular o limite de uma função na forma algébrica e categorizadas por: problemas conceituais: existência e limites laterais.

Na P2 e P8, a maneira com que os estudantes lindam com frações, cujo numerador ou denominador é igual a zero, se sobressai no que diz respeito as propriedades algébricas dos números reais.

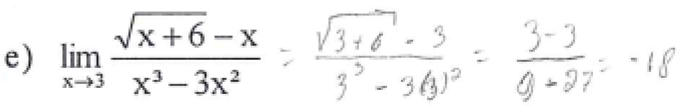



Figura 3.11: Produção escrita P2
Fonte: Acervo do autor

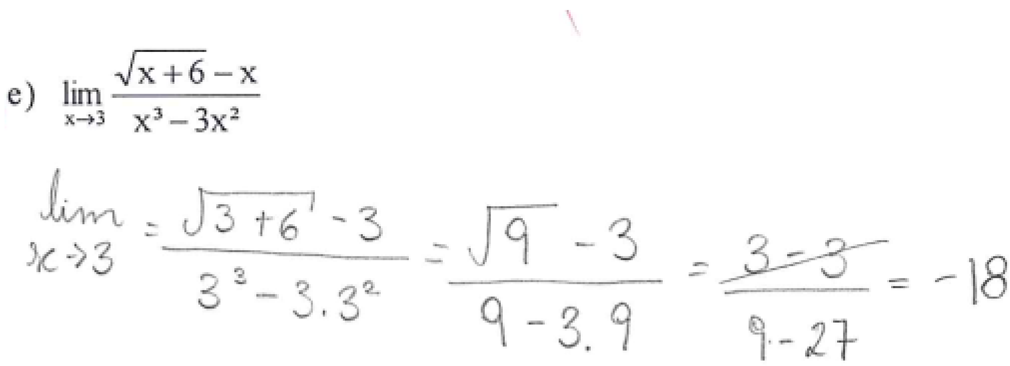



Figura 3.12: Produção escrita P8
Fonte: Acervo do autor

Diante das dos registros apresentados nas Figuras 3.11 e 3.12, foi identificado que para estes estudantes uma divisão cujo numerador é 0 e denominador é diferente de zero o resultado é o próprio denominador, isto é, seja $x$ pertencente aos reais, com $x$ diferente de zero, temos que $\frac{0}{x} = x$. O que nos mostra que houve algum deslize durante a formação escolar do aluno, em se tratando do conjunto dos números reais. Ressalta-se também, no segundo caso, a maneira com que utiliza a igualdade junto ao conceito de limite, o estudante omite a função que se deseja calcular o limite. Estas duas produções escritas foram agrupadas por: divisão de 0 por x obtém resultado $x$ e categorizadas por: obstáculo na matemática escolar.

Nas produções escritas das provas P5, P6, P7, P10, P11, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P22, P24, P25, P27, P28, P31, P32, P33, P34, P35, P37, P38 e P40 há diversas estratégias para resolver os limites, além disso, nos procedimentos há formas equivocadas da utilização de propriedades e conceitos matemáticos. De certa forma, estes estudantes compreendem que é necessário manipular algebricamente a função para resolver o limite proposto. No que se refere a matemática acadêmica e Escolar nas resoluções da Tabela 2, os estudantes mostram saber os conceitos relacionados ao cálculo, mas, apresentam dificuldades na matemática trabalhada na matemática escolar. Observemos a seguir produções extraídas das provas mencionadas anteriormente. Agora, é necessário verificar se o mesmo ocorre em outras questões. Por exemplo, na P5 há os seguintes registros:

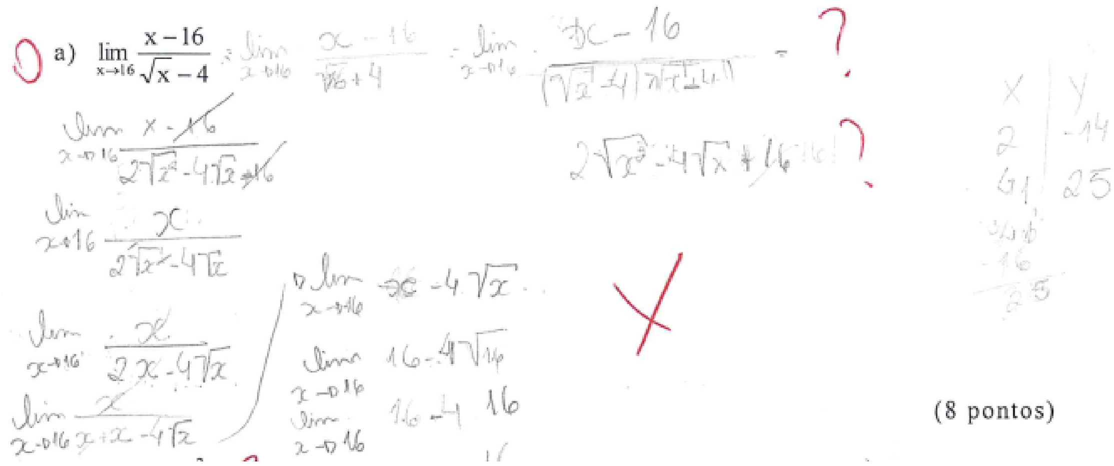



Figura 3.13: Produção escrita P5-a
Fonte: Acervo do autor

Conforme a Figura 3.13, o estudante utiliza a estratégia de multiplicar o denominador da função por $\sqrt{x}-4$, ou seja, não mantém a equivalência da fração algébrica. A seguir, corta $-16$ do numerador e denominador de forma equivocada, o estudante deve pensar que a simplificação válida para o inverso de um número, na multiplicação, vale também para o simétrico de um número, na adição. Em outras palavras, se está somando e diminuindo “devo cortar”. Em outro momento, realiza esse mesmo procedimento, conforme a Figura 3.14.

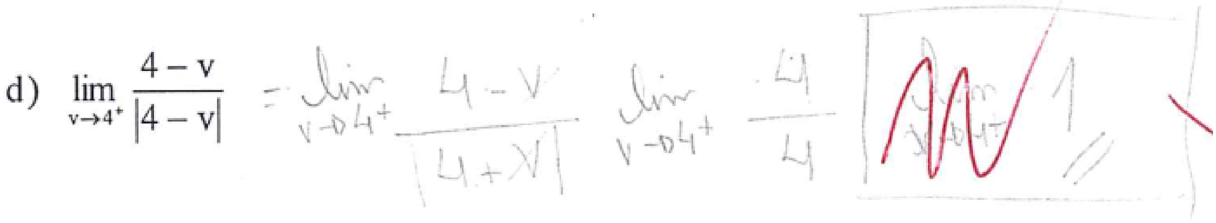



Figura 3.14: Produção escrita P5-d
Fonte: Acervo do autor

Na P6, no item “c” do exercício 6, a estratégia para resolvê-lo é extrair a raiz quadrada do numerador da fração e a raiz cúbica do denominador, conforme a Figura 3.15 .

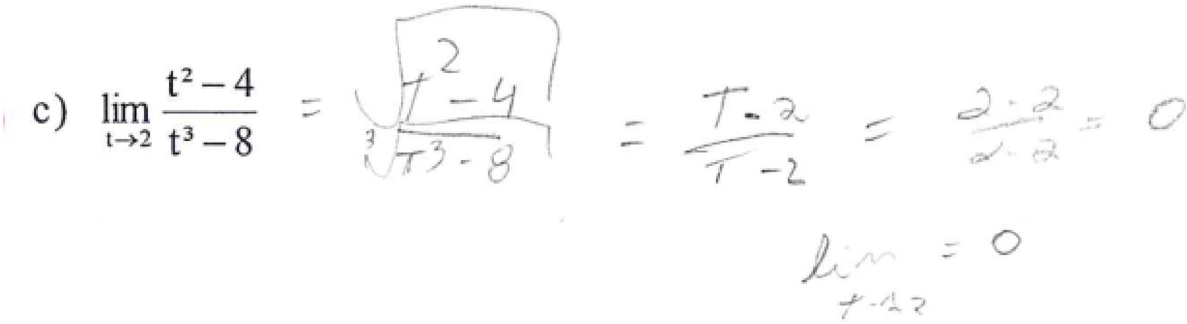



Figura 3.15: Produção escrita P6
Fonte: Acervo do autor

Neste caso, o estudante separa a raiz pela diferença dos radicandos, propriedade que só pode ser utilizada na multiplicação e divisão. Além disso, conclui que uma divisão por zero tem resultado zero.

A produção P14, trazida na Figura 3.16, mostra uma estratégia utilizada da multiplicação pelo conjugado da diferença de $\sqrt{x+16}-x$ para sair da descontinuidade e utilizou equivocadamente propriedades matemáticas como a distributividade de $\sqrt{x+16}-x$ com $\sqrt{x+6}+x$, a potenciação ao efetuar a adição entre $x$ e $x^2$ e simplificar $x^3$ do numerador com $x^3$ do denominador.

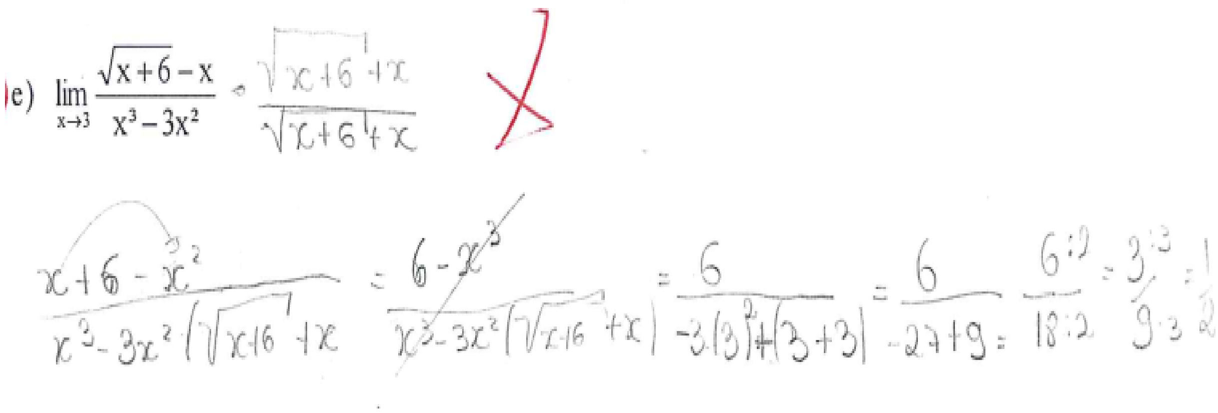


Figura 3.16: Produção escrita P14
Fonte: Acervo do autor

Na P24 há o seguinte registro (Figura 3.17).

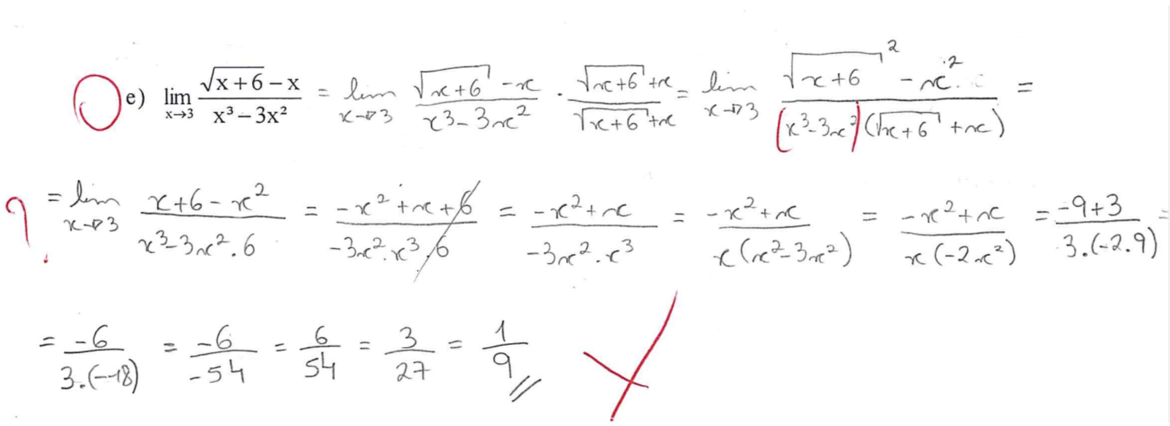


Figura 3.17: Produção escrita P24
Fonte: Acervo do autor

É utilizada uma estratégia correta para resolver o limite, mas da primeira para a segunda igualdade a distributividade foi desenvolvida de forma equivocada, já na quarta igualdade o estudante corta o 6 que está sendo adicionado no numerador com 6 do denominador, que está sendo multiplicado.

Na produção escrita abaixo (Figura 3.18), podemos observar que o estudante utiliza os produtos notáveis como estratégia, mas fez $-3-1=-2$ ao invés de $-4$.

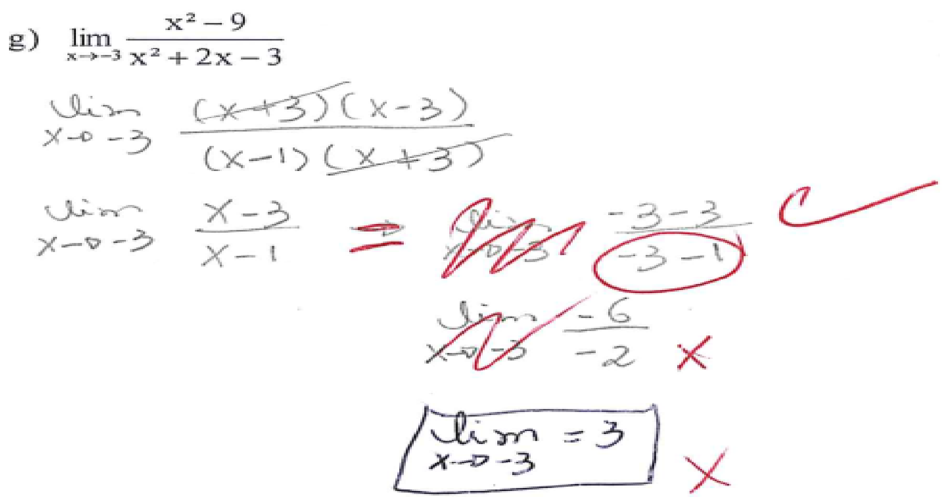


Figura 3.18: Produção escrita P28
Fonte: Acervo do autor

Nos registros da P40 (Figura 3.19), é utilizada a estratégia de calcular o limite para $x$ tendendo a 1 pela direita utilizando $x = 1,5$. Primeiramente, ao efetuar $2,5^2$ obtém $22,5$ e mantém esse resultado, o aluno talvez não tenha percebido que este resultado não faz sentido ou que o estudante aprendeu que em uma operação entre números decimais a vírgula sempre deve ficar embaixo da vírgula, bem como a ideia trazida da escola de que tudo que for igual deve "cortar" se mostra no corte de $22,5$ com $22,5$.

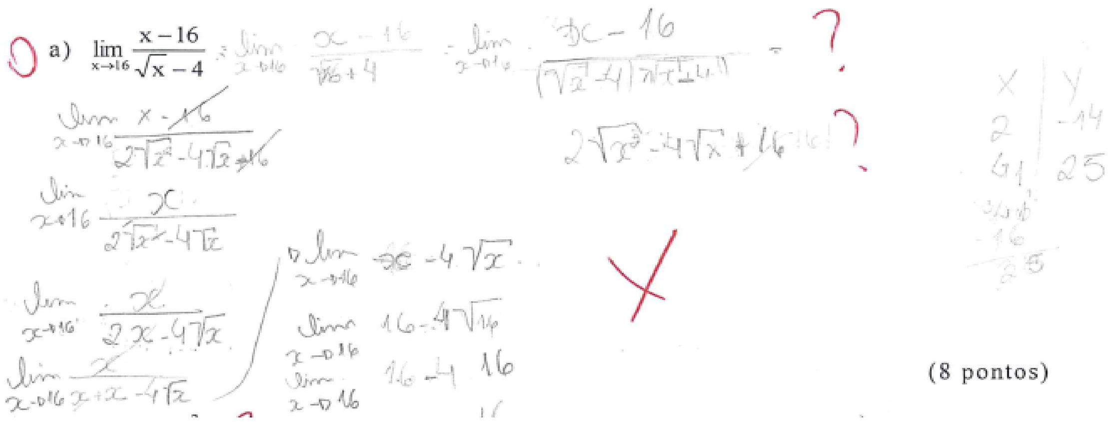


Figura 3.19: Produção escrita P40
Fonte: Acervo do autor

Diante das produções mostradas acima, nota-se que em muitos casos os estudantes utilizam estratégias corretas para resolver o limite, ou seja, compreendem que no ponto dado o limite é indeterminado, portanto é necessário encontrar uma nova função que seja contínua neste ponto para assim obter o limite ou concluir de que ele não existe, no entanto, os problemas obtidos através de manipulações algébricas impedem que o aluno chegue ao resultado esperado. Como a função é dada por uma fração algébrica, não poderiam realizar manipulações que não mantivessem a equivalência da fração, muitos alunos têm receio de trabalhar com frações, tal impasse é trazido da Matemática Escolar, gerando um conflito na aprendizagem do aluno. Logo, as provas P5, P6, P7, P10, P11, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P22, P24, P25, P27, P28, P31, P32, P33, P34, P35, P37, P38 e P40 serão agrupadas por: compreendem conceitos do Cálculo e demonstram um obstáculo na Matemática Escolar e categorizadas por: obstáculo na matemática escolar.

Com base na matemática escolar é possível notar os conhecimentos inerentes a ela nas maneiras de lidar dos estudantes. Nota-se que muitos dos estudantes mostram saber o conceito de fração, primordial para o estudo de funções e limites. Além disso, quase todos os alunos conhecem o princípio da função, que é relacionar dois elementos, aplicar um elemento do domínio à uma lei de formação para obter uma imagem. Alguns alunos têm mais afinidade ao se trabalhar com a representação gráfica de uma função, tendo em vista que, na maioria das vezes, é mais fácil notar o local que a função não é contínua em um determinado ponto, implicando na não existência do limite da função neste ponto. Alguns estudantes mostram saber propriedades matemáticas como distributividade, potenciação, radiciação e racionalização, propriedades fundamentais para a resolução de exercícios que envolvem o conceito de função.

Diante da análise das produções escritas e na discussão realizada anteriormente, elaboramos um quadro (Tabela 3.2) a fim de resumir os agrupamentos e categorias formadas.

Tabela 3.2: Descrições e inferências
Fonte: O autor

| **Prova** | **Agrupamento** | **Categoria** |
|---|---|---|
| P3, P21, P26, P30, P36, P41 | Estratégia correta e procedimentos corretos | Totalmente correto |
| P1, P4, P23, P29, P42 | Estratégia: aplicar o ponto no limite e Procedimento: cumprir que o limite não existe a partir de $\frac{0}{0}$ | Problemas conceituais: existência e limites laterais |
| P9, P39 | Utilização dos limites laterais para calcular o limite de uma função na forma algébrica | |
| P12, P13 | Não calcula o limite de uma função na forma alalgébrica | Obstáculo na Matemática Escolar |
| P2, P8 | Divisão de 0 por $x$ resultados $x$ resultados | |
| P5, P6, P7, P10, P11, P14, P15, P16, P17, P18, P19, P20, P22, P24, P25, P27, P28, P31, P32, P33, P34, P35, P37, P38, P40 | Comprrendem conceitos do Cálculo e demonstram um obstáculo na matemática escolar | |

Estas categorias obtidas chamaram-nos a atenção para o fato de que dos 42 estudantes que fizeram a prova, apenas seis obtiveram a pontuação completa nas questões envolvendo o conceito de limite. No entanto, os outros 36 apresentaram resoluções que demonstraram alguma compreensão a respeito da ideia e do conceito de limite. Sendo que 25 demonstraram compreender o conceito de limite, mas não chegaram à resposta correta por cometerem erros na Matemática Básica. No entanto, eles demonstram conhecer uma matemática escolar e esta matemática escolar acaba funcionando como um obstáculo à aprendizagem da matemática acadêmica. Mais impressionante é perceber indícios de que mesmo na categoria que aponta para problemas conceituais, estes possam ainda estarem sustentados em um conhecimento escolar: o de que 0/0 não exista. É possível que tenham transferido este conhecimento para o cálculo do limite. Também no agrupamento da utilização dos limites laterais para o cálculo do limite da função apresentada em sua forma algébrica, pode indicar que o estudante sente insegurança com a manipulação algébrica, a qual sustenta-se na matemática básica, a qual, pelo currículo, deveria ser aprendida na Educação Básica.

# Capítulo 4

# Algumas considerações

Diante da análise e discussão, é possível notar o impacto da matemática escolar na matemática acadêmica, tendo em vista que muitos alunos mostram saber os conhecimentos relacionados à acadêmica. O conhecimento algébrico, manipulações algébricas, é fundamental na resolução de limites de funções, no entanto a maneira com que muitos estudantes lidam com a álgebra impossibilitou a resoluções destes problemas. Por exemplo, as tentativas de simplificações nas frações algébricas. Os alunos chegam no Ensino Superior com uma grande defasagem em sua aprendizagem em Matemática, os cursos da área de ciências exatas, como a Engenharia Agrícola, o curso em questão, apresentam disciplinas cujas ementas são voltadas para a revisão da matemática escolar e preparação para disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear.

Estes resultados trazem à tona elementos da matemática escolar e sua característica predominante que é o mecanicismo, corroborando com o que já fora apontado por Freudenthal (1991), em sua classificação para o ensino de matemática aponta que, de acordo com uma perspectiva mecanicista do ensino de Matemática, o homem é um instrumento semelhante a um computador, que pode ser ensinado por "drill to perform" (FREUDENTHAL, 1991, p.135). Esta expressão diz respeito a um método de ensino caracterizado pela repetição sistemática de conceitos, exemplos e exercícios similares. Se baseia na disciplina e memorização, no reconhecimento de padrões para aplicação de processos já aplicados anteriormente, "envolve a repetição de habilidades específicas, como ortografia ou multiplicação [...]". Freudenthal (1991, p.135) considera que a repetição é utilizada para "[...] realizar, no nível mais baixo, operações aritméticas e algébricas, talvez até geométricas, e para resolver problemas aplicados, distinguidos por padrões reconhecíveis, possíveis de serem reproduzidos [...]" tais como experimentos repetíveis em condições de laboratório.

Esta característica predominante da matemática escolar diverge muito da característica predominante da matemática acadêmica, a qual é estruturalista e formalista, baseada no encadeamento lógico e na dedução, partindo de um mundo criado ad hoc, que não tem nada em comum com o mundo vivo do aluno. A matemática estruturalista e formalista é ensinada na torre de marfim do indivíduo racional, longe do mundo e da sociedade (FREUDENTHAL, 1991).

No caso da Engenharia Agrícola, conforme o Projeto Político Pedagógico (CEPE, 2018), há oferta de duas disciplinas que visam preparar o estudante: Fundamentos da Matemática e Introdução ao Cálculo. A segunda disciplina, como o próprio nome já diz, trabalha com conceitos pré-requisitos que os alunos precisam para estudar o Cálculo. No entanto, conforme a análise e discussão das produções escritas registradas pelos estudantes de Engenharia Agrícola, notamos que a maioria apresenta dificuldade na matemática escolar, mesmo tendo duas disciplinas voltadas aos conceitos abordados no ensino fundamental e médio. Além disso, essas disciplinas são semestrais, das quais Fundamentos da Matemática e Introdução ao Cálculo ocorrem no primeiro semestre e Cálculo Diferencial e Integral I ocorre no segundo, logo não é possível estabelecer uma sincronia entre as disciplinas, por exemplo, enquanto Introdução ao Cálculo aborda funções, o Cálculo Diferencial e Integral I poderia trabalhar com Limites, ou seja, os alunos conseguiriam visualizar a simultaneidade dos conteúdos e suas aplicações, tendo em vista que uma das dificuldades destes estudantes é a compreensão do conceito de função e continuidade. Portanto, uma das sugestões de intervenção está diretamente ligada com a reformulação das grades curriculares dos cursos, visando a sincronia de disciplinas.

No entanto, sabemos que muitas vezes há a impossibilidade de adequar grades curriculares conforme a necessidade, pode ser por questões burocráticas ou por conflitos de horários. Neste sentido, o local de intervenção deve mudar. A reflexão, neste âmbito, deve ser voltada à prática docente e em como a Matemática é abordada em sala de aula, além disso, no que diz respeito à avaliação. Para tanto, deve-se ir além da concepção do estudante como um ser passivo, repetindo passo a passo o que o professor expõe, utilizando propriamente uma abordagem mecanicista da matemática. Com isso, consideramos aqui a Educação Matemática Realística (RME, do inglês Realistic Mathematics Education).

> [...] o matemático Hans Freudenthal sugere uma abordagem para o ensino de matemática, denominada Educação Matemática

> Realística (RME), cujo princípio fundamental é de que a “matemática é uma atividade humana” [...].
>
> [...] Freudenthal (1973) apresenta matemática como uma construção humana. O autor narra a necessidade do homem de contar, de medir áreas, tratando cada um desses fenômenos como motes para o ser humano pensar matematicamente (matematizar). Além desses fenômenos, Freudenthal trata de outros, como a astronomia, os estudos de geometria algébrica, de teoria dos números, ressaltando que o homem faz matemática (matematiza) a partir de necessidades sociais, culturais, científicas, da própria matemática (SILVA, 2018, p.21-22).

Nesta perspectiva da Educação Matemática Realística e ao encontro com o Capítulo 2 desta pesquisa, no qual discutimos aspectos da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, a avaliação proposta por autores da RME tem princípios baseados nesta perspectiva:

> 1. O primeiro, e principal, propósito da avaliação é auxiliar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.
> 2. Métodos de avaliação devem possibilitar aos estudantes mostrarem o que sabem, não o que não sabem.
> 3. Avaliação deve operacionalizar todos os objetivos da Educação Matemática.
> 4. A qualidade da avaliação em matemática não é dada primariamente pela acessibilidade à pontuação.
> 5. Matemática está imbuída em problemas úteis (atraentes, educativos, autênticos) que são parte do mundo real dos estudantes.
> 6. Critérios de avaliação devem ser públicos e consistentemente aplicados.
> 7. O processo de avaliação, incluindo pontuação, deve ser aberto aos estudantes.
> 8. Estudantes devem ter a oportunidade de receber feedback genuíno de seus trabalhos.
> 9. Um planejamento de avaliação balanceado deve incluir múltiplas e variadas oportunidades (formatos) para os estudantes mostrarem e documentarem suas realizações (LANGE, 1999 apud SILVA, 2018, p.21-22)

Com base na análise e discussão das produções escritas registradas pelos estudantes de Engenharia Agrícola da disciplina de Cálculo, postas no subcapítulo anterior, elaboramos propostas baseadas da Educação Matemática Realística e nos nove princípios da avaliação, mencionados anteriormente. Tais propostas levam em consideração a análise desta turma, mas que podem ser utilizadas em turmas futuras, com intuito de que o estudante possa sentir o prazer da construção do conhecimento e aprendizado.

Proposta primeira, prova em fases. Também conhecida como prova em duas fases. Este instrumento avaliativo é composto por várias fases. Na primeira fase os estudantes resolvem as questões, da maneira que acharem necessário, ou seja, escolhem quais e quantas querem resolver., no entanto a prova é resolvida em sala de aula com tempo limitado. Nas próximas fases, na maioria das vezes, a prova é resolvida em casa, com maior tempo para resolução (SILVA, 2018). A prova em fases pode oportunizar aos estudantes uma reflexão acerca do seu próprio trabalho, após ser resolvida pela primeira vez na escola, a prova é corrigida e comentada pelo professor, para então o aluno levar para casa e concluir a resolução (LANGE, 1999 apud TREVISAN; BURIASCO, 2014). O professor poderá identificar dificuldades dos alunos e através desde diagnóstico intermediar, isso pode ser feito entre as fases. Com isso, o docente poderá ver na fase seguinte se o aluno refletiu e aprendeu sobre aquele conceito que teve dificuldade ou não resolveu na prova e, se necessário, realizar novas intervenções. O professor poderá identificar dificuldades dos alunos e através desde diagnóstico intermediar, isso pode ser feito entre as fases. Com isso, o docente poderá ver na fase seguinte se o aluno refletiu e aprendeu sobre aquele conceito que teve dificuldade ou não resolveu na prova e, se necessário, realizar novas intervenções.

Proposta segunda, vaivém. É um instrumento de avaliação criado pela professora Regina Luiza Corio de Buriasco, utilizado em aulas de graduação e pós-graduação desde a década de 78. Primordialmente, este instrumento estabelece a comunicação entre professor e estudantes, individualmente e escrito. O professor realiza uma pergunta para toda a turma e os estudantes respondem em uma folha de papel. A partir das respostas individuais dessa pergunta o professor faz comentários e novas perguntas (SILVA, 2018). A utilização do papel para escrever as respostas está relacionada com a confidencialidade, que é estabelecida para que o aluno tenha liberdade de fazer perguntas ao professor, além de respostas, “falar abertamente, sem a exposição aos demais colegas e sem a criação de uma cultura em que só o que é correto que deve ser expresso” (SILVA; BARDAÇON; VENTURINI, 2019, p.1) e, caso o aluno queira, pode quebrar a confidencialidade.

Proposta terceira, Tarefas de Análise da Produção Escrita (TAPE). Nesta proposta, a ideia principal é utilizar a Análise da Produção Escrita nas aulas de matemática, neste sentido, Pereira (2019, p.3) coloca que "é importante destacar que ao selecionar uma tarefa para propor aos alunos, o professor considera vários aspectos, como o objetivo que se pretende alcançar, o tempo disponível para se trabalhar, os conhecimentos prévios dos alunos". Nesta perspectiva,

> Uma das mais importantes decisões que o professor realiza regularmente na sua atividade de ensino incide sobre as tarefas que propõe na aula. É em torno das tarefas que as aulas se desenrolam; elas são o ponto de partida para as experiências de aprendizagem dos alunos (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2012 apud PEREIRA, 2019, p.3).

É importante oportunizar diferentes experiências para os alunos, ou seja, novas tarefas baseadas da análise da produção escrita de tarefas anteriores poderão ser realizadas, mas podendo ser com situações diferentes, com intuito de convergir para a aprendizagem. Exemplificando, à luz das produções escritas analisadas nesta pesquisa, as tarefas poderiam ser sobre funções e as propriedades matemáticas que os alunos apresentaram dificuldade, assim novas tarefas podem refinar ainda mais a análise, caso sejam necessárias.

Além destas propostas, há outros instrumentos avaliativos que poderão ser utilizados, como a Ficha de Autoavaliação, Portifólios e a Prova Escrita com Cola. A utilização em aulas destes instrumentos de avaliação e os destacados como propostas podem ser vislumbrados na tese de Silva (2018), mostrando que de fato há progressão da aprendizagem quando a avaliação é utilizada como prática de investigação. Esta pesquisa não apresenta a utilização dos instrumentos de avaliação mencionados, tendo em vista que ocorreu com a turma de 2015. No entanto, fica lançada a proposta de avanço deste trabalho em dissertação e tese.

# Apêndice A

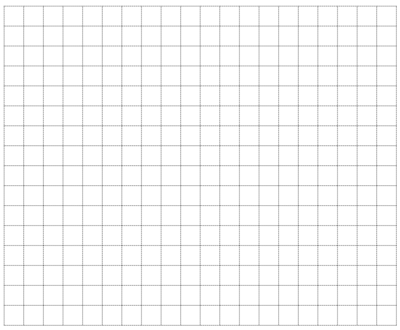
# Prova Escrita 1 - Engenharia Agrícola (2015)

**1)** Seja $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

a) Calcule h(-2)

b) Calcule h(1)

c) Esboce o gráfico de h.



**2)** Calcule o quociente das diferenças e simplifique a sua resposta quando possível.

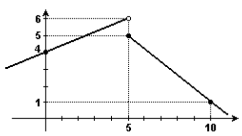
a) Se $f(x) = 4 + 3x - x^2$, calcule

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

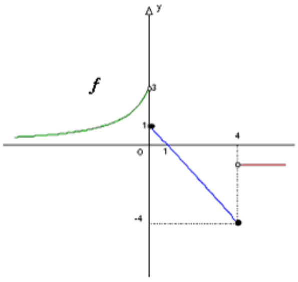
b) Se $g(x) = \frac{1}{x}$, calcule

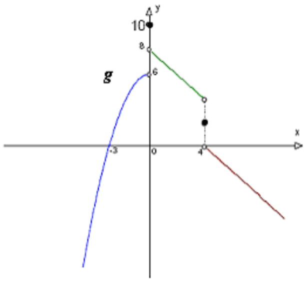
$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

**3)** Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva dada a seguir.



**4)** A partir da representação das funções f e g




a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ c) $f(0) =$ d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

e) $f(4) =$ f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ g) $g(0) =$ h) $g(4) =$

i) $\lim\limits_{x \to 4} g(x) =$ j) $\lim\limits_{x \to -3} g(x) =$

**5)** Considerando que o Domínio das funções esboçadas na questão **4)** anterior é o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, qual será o conjunto Imagem?

a) Im (***f***) = b) Im (***g***) =

a) Calcule o limite de a) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ec^2 x}{\cot ag^2 x}$

c) $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

d) $\lim\limits_{v\to 4^+} \dfrac{4-v}{|4-v|}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

**6)** Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições seguintes: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$; f(2)=1 e f(-2)=-3.

# Apêndice B

# Solicitaçao de dados do Academus

*UNIOESTE - PROTOCOLO CAMPUS DE CASCAVEL*

***REQUERIMENTO DE GRADUAÇÃO***

****ATENÇÃO: No campo de dados pessoais é OBRIGATÓRIO o preenchimento de TODOS os ITENS****

**Nome Completo:** Guilherme Gasparini Lovatto

**RA:** 63158 **CPF:** 10961285940 **RG:**

**Telefone fixo:** **Celular:**

**Curso:** Matemática **Série:** 4º **Turno:** M [ ] I [ ] N [X]

**EMAIL:**

[X]Cursando [ ]Desistente em (ano) :_______ [ ]Trancado em (ano):______ [ ]Formado em (ano):_______

Código Protocolo | Descrição Documento | Destinatário e Prazo | Campo informativo reservado ao Protocolo Campus

[ ] 205 Certificado de Conclusão de Curso (2ª via: R$ 5,00) - (CAD) 5 dias úteis

[ ] 255 Comprovante de Matrícula (disciplinas) (CAD) até 5 dias úteis

[ ] 208 Declaração de Matrícula (curso) (CAD) até 5 dias úteis

[ ] 207 Declaração de Frequência (CAD) até 5 dias úteis

[ ] 257 Declaração de Provável Formando(CAD) até 5 dias úteis

Luan
Protocolado
15 / 10 / 20

[ ] 209 Declaração Específica (CAD) 5 dias úteis

Especificar o conteúdo da declaração: ____________________

[ ] 72 Extrato de Horas Extra Curriculares já aprovadas (CAD) até 5 dias úteis

[ ] 211 Histórico Escolar Completo (somente disciplinas aprovadas) (CAD) - Sem vínculo R$5,00
- Anterior ao ano de 1997 - 20 dias úteis. - De 1997 aos anos atuais - até 5 dias úteis.

[ ] 212 Histórico Informal (todas as disciplinas cursadas) (CAD) até 5 dias úteis

[ ] 206 Programa das Disciplinas (R$ 0,50 por Disciplina) (CAD) 20 dias úteis
[ ] Todas as Disciplinas do curso.
[ ] Listar a(s) disciplina(s) solicitada(s): ____________________

[ ] 203 Listagem das Disciplinas Não-concluídas (CAD) até 5 dias úteis

[ ] 232 Matrícula em Disciplina em mesmo curso/outro curso/turno: (CAD) *
Nome da Disciplina:____________ Curso: ____________
Turno: __________ Justificativa:____________

[ ] 231 Cancelamento de Matrícula em disciplina: (CAD) *
Nome da Disciplina:____________ Curso: ____________
Turno: __________ Justificativa:____________

[ ] 204 Cancelamento de Matrícula no Curso (CAD) *
Parecer da Biblioteca:____________

[ ] 225 Trancamento de Matrícula no curso: (CAD) * [ ] 01 ano [ ] 02 anos
Não há Trancamento de Matrícula no ano em que ocorrer o ingresso no curso.
Parecer da Biblioteca:____________

[ ] 202 Reabertura de Matrícula: (R$ 5,00) [ ] Por Trancamento [ ] Por Abandono (CAD) *

[ ] 219 Regime de Exercícios domiciliares – Anexar Comprovante (CAD) *
Especificar:____________

[ ] 233 Aproveitamento de Estudos (CAD) *

(anexar originais: Histórico Escolar completo contendo o sistema de avaliação e os conteúdos programáticos das disciplinas cursadas)

[ ] Todas as disciplinas possíveis ou

Especificar as disciplinas que o acadêmico solicita o Aproveitamento de Estudos:

[ ] 229 Segunda Chamada de Prova (Colegiado Curso)

Disciplina: Curso: Série

Professor: Data que a prova foi realizada: / /

Justificativa:

[ ] 223 Revisão de Prova (Colegiado Curso)

Disciplina: Curso: Série

Professor: Data da prova: / /

[ ] 222 Dar Vistas à Prova de Exame (Colegiado Curso)

Disciplina: Curso: Série

Professor: Data da prova: / /

[ ] 234 Diploma do Curso - 2ª via - R$ 140,00 (Anexar cópias dos seguintes documentos: Histórico Escolar do Ensino Médio, certidão de nascimento ou casamento, RG e CPF ) (CAD) 90 a 120 dias

[ ] 243 Justificativa de Faltas (Anexar comprovante ou especificar o motivo) (Colegiado do Curso):

[ ] 200 Cartão do Restaurante Universitário (RU) – segunda via. (CAD) R$ 20,00 - 5 dias úteis

Isento - apresentando Boletim de Ocorrência (BO)

[X] 247 Outros: Solicito a quantidade de Aprovados, reprovados e cancelados da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de Engenharia Agrícola de 2015. Além disso, a quantidade de vezes que cada aluno dessa turma cursou o CDI, situação acadêmica e se foram aprovados na disciplina

Cascavel, 14 de outubro de 2020.

Assinatura do Requerente

*** O requerente deverá consultar no ACADEMUS ou retornar após 10 dias úteis para saber o resultado da solicitação.**

**Espaço Reservado Coordenação Acadêmica e ao Colegiado de Curso**

**[X] Deferido [ ] Indeferido**

COORDENAÇÃO ACADÊMICA
UNIOESTE/Campus Cascavel

# Referências Bibliográficas


BALDINO, R. R. et al. *Do coeficiente angular da reta ao conceito de diferencial: Crítica ao ensino atual e proposta alternativa*. 1995. Disponível em: ⟨https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/361/417⟩. Acesso em: 03 nov 2020.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. 3. ed. São Paulo: [s.n.], 2004.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. 70. ed. São Paulo: [s.n.], 2016.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1999.

BORASI, R. Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, Quebec, v. 7, n. 3, p. 2–8, Novembro 1987.

BURIASCO, R. L. C. de. *Algumas considerações sobre avaliação educacional*. 2000. Disponível em: ⟨http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/article/view/2221/2179⟩. Acesso em: 16 set 2020.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). *BOLEMA*, Rio Claro, SP, v. 22, n. 33, p. 69–96, Dezembro 2009.

CEPE. *Aprova o Projeto Político Pedagógico do Curso de Engenharia Agrícola - Bacharelado, do campus de Cascavel. Resolução n. 248/2018 - CEPE*. 2018. Disponível em: ⟨https://midas.unioeste.br/sgav/arqvirtual\#/detalhes/?arqVrtCdg=15668⟩. Acesso em: 25 mai 2021.

DAVID, M. M.; MOREIRA, P. C.; TOMAZ, V. S. *Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação*. 2013. Disponível em: ⟨http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/349⟩. Acesso em: 20 ago 2020.

ESTEBAN, M. T. *Avaliar: ato tecido pelas imprecisçoes do cotidiano*. 2000. Disponível em: ⟨https://servicos.educacao.rs.gov.br/pse/binary/down_sem/DownloadServlet?arquivo=textos/maria_esteban_aval_ato_tecido_imprec_cotid.pdf⟩. Acesso em: 28 out 2020.

FREUDENTHAL, H. *Revisiting Mathematics Education*. 70. ed. Boston: China Lectures, 1991.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. *A adaptação das tarefas Matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações*. 2012. Disponível em: ⟨https://core.ac.uk/reader/62455630⟩. Acesso em: 14 mjun 2021.

GARNICA, A. V. M. *Erros e leitura positiva: proposta, exercícios e possibilidades*. 2006. Disponível em: ⟨http://docs.upf.br/download/jem/trabalhos-2006/mesas/MRED_GARNICA_.pdf⟩. Acesso em: 22 jul 2020.

HADJI, C. *A avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos*. Portugal: Portoeditora, 1994.

IDEB. *IDEB-Resultados e Metas*. 2020. Disponível em: ⟨http://ideb.inep.gov.br/resultado/⟩. Acesso em: 27 out 2020.

LACAZ, T. M. V. S.; CARVALHO, M. T. L.; FERNANDES, J. A. S. *Implicações das dificuldades dos alunos na aprendizagem da disciplina cálculo diferencial e integral I da FEG/UNESP para as práticas pedagógicas*. 2007. Disponível em: ⟨http://www.abenge.org.br/cobenge.php⟩. Acesso em: 11 jul 2021.

LANGE, J. de. *Framework for classroom assessment in mathematics*. 3. ed. New York: Madison: WCER, 1999.

LUCKESI, C. C. *A Avaliação da Aprendizagem Escolar*. 3. ed. São Paulo, SP: Cortez, 1996.

MACHADO, P. A. P. *Uma abordadem para a disciplina de Cálculo A*. 2012. Disponível em: ⟨https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/534/2020/03/CC_Machado_Pedro.pdf⟩. Acesso em: 08 jun 2021.

MENDES, M. T.; BURIASCO, R. L. C. de. O dinamismo de uma prova escrita em fases: um estudo com alunos de cálculo diferencial e integral. *BOLEMA*, Rio Claro, SP, v. 32, n. 61, p. 653–672, Agosto 2018.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *IDEB-Apresentação*. 2007. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/busca-geral/138-programas-e-acoes-1921564125/ideb-indice-de-desenvolvimento-da-educ-basica-878961830/180-apresentacao-sp-1643264658⟩. Acesso em: 27 out 2020.

NAGY-SILVA, M. C. *Do Observável ao Oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática*. 2005. Disponível em: ⟨http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000106152⟩. Acesso em: 07 jun 2021.

NAGY-SILVA, M. C.; BURIASCO, R. L. C. de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. *Ciência e Educação*, Rio Claro, SP, v. 11, n. 3, p. 499–512, Outubro 2005.

PEREIRA, B. de F. A.; MONDINI, F.; MOCROSKY, L. F. Expondo os índices de permanência e continuidade na disciplina de cálculo diferencial e integral i em cursos de engenharia na unesp - campus guaratinguetá. *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, Cascavel, PR, v. 3, n. 3, p. 841–853, Dezembro 2019.

PEREIRA, E. R. S. da S. *Tarefas de Análise da Produção Escrita para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória*. 2019. Disponível em: ⟨http://eventos.sbem.com.br/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM2019/paper/viewFile/563/796⟩. Acesso em: 26 mai 2021.

REIS, F. da S. *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos*. Tese (Tese de Doutorado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2001.

REZENDE, W. M. *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Maio 2003.

SILVA, D. P. da; PASSOS, M. M.; SAVIOLI, A. M. P. das. Caracterizações do pensamento algébrico manifestadas por estudantes em uma tarefa da early algebra. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, PR, v. 8, n. 3, p. 53–84, Agosto 2015.

SILVA, G. dos Santos e. *Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação*. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2018.

SILVA, G. dos Santos e; BARDAÇON, A. C.; VENTURINI, L. de S. *Um estudo de um Vaivém à luz da Educação Matemática Reslística*. 2019. Disponível em: ⟨http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1220/825⟩. Acesso em: 26 mai 2021.

SPINILLO, A. G. et al. Como professores e futuros professores interpretam erros de alunos ao resolverem problemas de estrutura multiplicativa? *BOLEMA*, Rio Claro, SP, v. 30, n. 56, p. 1188–1206, Dezembro 2016.

STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016.

TREVISAN, A. L.; BURIASCO, R. L. C. de. *Análise da produção escrita em uma prova de Matemática em Fases*. 2014. Disponível em: ⟨https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1878⟩. Acesso em: 26 mai 2021.

TREVISAN, A. L.; BURIASCO, R. L. C. de. Percepções de estudantes acerca de um instrumento diferenciado de avaliação em aulas de matemática. *BOLEMA*, Rio Claro, SP, v. 30, n. 56, p. 1207–1221, Dezembro 2016.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. *Integral antes da derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo*. 2017. Disponível em: ⟨https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/33318⟩. Acesso em: 19 ago 2020.

VIANNA, H. M. *Medidas Referenciadas a Critério - Uma Introdução*. 1998. Disponível em: ⟨http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_08_p145-160_c.pdf⟩. Acesso em: 15 jul 2020.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. *O que os alunos da escola básica mostram saber por meio da produção escrita em matemática*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2007.